

Комбинаторика

Основные формулы

Количество размещений без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Количество размещений с повторениями

$$n^k$$

Количество перестановок

$$P_n = n!$$

Количество сочетаний без повторений

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Количество сочетаний с повторениями

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Задача 1.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 2, 0, 1, 9, чтобы цифры не повторялись?

Решение:

На 1 позицию можно поставить одну из 3 цифр: 1, 2, 9 (0 - нельзя)

На 2 позицию можно поставить одну из 3 оставшихся цифр

На 3 позицию можно поставить одну из 2 оставшихся цифр

На 4 позицию можно поставить 1 оставшуюся цифру

Итого: $3 * 3 * 2 * 1 = 18$

Задача 2.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, чтобы цифры не повторялись?

Решение:

Все комбинации: количество размещений четырёх цифр из шести: $\frac{6!}{(6-4)!} = 360$

«Запрещённые» комбинации – комбинации с 0 в начале: количество размещений трёх цифр из пяти: $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$

Итого: $360 - 60 = 300$

Задача 3.

Сколькими способами можно выбрать две карты из колоды?

Решение:

$$\text{Число сочетаний двух карт из 36: } C_{36}^2 = \frac{36!}{2!(36-2)!} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630$$

Задача 4.

Какова вероятность, что две вытянутые из колоды карты окажутся тузами?

Решение:

$$\text{Всего количество способов выбрать 2 карты из 36: } C_{36}^2 = \frac{36!}{2!(36-2)!} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630$$

$$\text{Количество «правильных» комбинаций: число способов выбрать из четырёх тузов любых двух: } C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

$$\text{Итого: } p = \frac{C_4^2}{C_{36}^2} = \frac{4 \cdot 3}{36 \cdot 35} = \frac{1}{105}$$

Задача 4.

Какова вероятность, что две вытянутые из колоды карты окажутся тузами?

Второй способ:

Вероятность вытянуть первый туз: $p_1 = \frac{4}{36}$ – в колоде из 36 карт – 4 туза

Вероятность вытянуть второй туз: $p_2 = \frac{3}{35}$ – в колоде осталось 35 карт, из них 3 туза

Итого: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} = \frac{1}{105}$

Задача 5. Лотерея «6 из 49»

Сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел из 49?

Решение:

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$$

Шанс угадать и выиграть в лотерею – примерно 1 из 14 миллионов

Задача 6.

Сколькими способами можно выбрать 3 человек из 25?

Решение:

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = 2300$$

Задача 7. Флаги

Допустим есть 5 цветов: белый, красный, синий, зелёный, жёлтый.

А) Сколькими способами можно выбрать 3 цвета из 5?

Решение:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

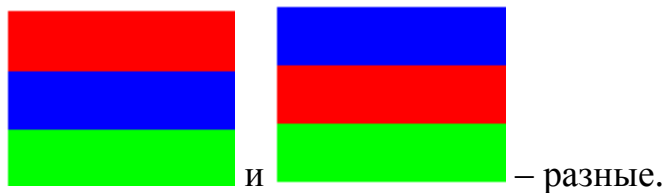
Порядок не важен: Красный, Синий, Зелёный = Синий, Красный, Зелёный

Б) Сколько можно составить трёхцветных горизонтальных флагов?

Решение:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

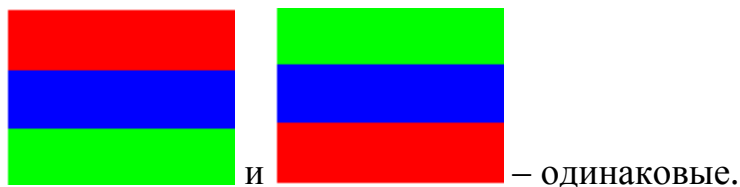
Порядок важен:



В) Сколько можно составить трёхцветных горизонтальных флагов, если можно переворачивать?

Решение:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$$



Задача 8. Рояль

У рояля 88 клавиш.

А) Сколько разных аккордов, состоящих из 6 нот, можно сыграть на рояле?

$$C_{88}^6 = \frac{88!}{82! \cdot 6!}$$

Б) Сколько способов последовательно извлечь 6 разных звуков?

$$A_{88}^6 = \frac{88!}{82!}$$

В) Сколько способов последовательно извлечь 6 любых звуков?

$$88^6$$

Г) Сколько способов последовательно извлечь 6 звуков, чтобы каждый следующий отличался от предыдущего?

$$88 \cdot 87 \cdot 87 \cdot 87 \cdot 87 \cdot 87$$

Задача 9. Студенты

10 студентов едут в поезде из 10 вагонов. Какова вероятность, что ни один студент не встретит другого студента.

Решение:

Всего способов разместить 10 студентов по 10 вагонам: 10^{10}

Комбинаций, когда в каждом вагоне по одному студенту: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\text{Итого: } p = \frac{10!}{10^{10}} = \frac{9!}{10^9}$$

Задача 10.

Есть 15 груш и 7 яблок

Сколькими способами можно выбрать 5 груш и 3 яблока?

Решение:

$$\text{Выбрать 5 груш из 15: } C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = 3003$$

$$\text{Выбрать 3 яблока из 7: } C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

$$\text{Итого: } C_{15}^5 \cdot C_7^3 = 3003 \cdot 35 = 105105$$

Задача 11.

Есть 15 груш и 7 яблок, случайно выбрали 5 фруктов.

А) Какова вероятность, что среди них будет **ровно** 3 груши?

Ровно 3 груши – значит 3 груши из 15 и 2 яблока из 7.

$$p = \frac{C_{15}^3 \cdot C_7^2}{C_{22}^5} = \frac{15! \cdot 7! \cdot 17! \cdot 5!}{12! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 22!}$$

Б) Какова вероятность, что среди них будет **не менее** 3 груш?

Не менее 3 груш – значит ровно 3 груши или ровно 4 груши или ровно 5 груш .

Ровно 3 груши – значит 3 груши из 15 и 2 яблока из 7.

Ровно 4 груши – значит 4 груши из 15 и 1 яблоко из 7.

Ровно 5 груш – значит 5 груш из 15 и 0 яблок из 7.

$$p = \frac{C_{15}^3 \cdot C_7^2 + C_{15}^4 \cdot C_7^1 + C_{15}^5}{C_{22}^5}$$

В) Какова вероятность, что среди них будет три **одинаковых** фрукта?

Три **одинаковых** фрукта – значит 3 груши из 15 и 2 яблока из 7 или 3 яблока из 7 и 2 груши из 15.

$$p = \frac{C_{15}^3 \cdot C_7^2 + C_7^3 \cdot C_{15}^2}{C_{22}^5}$$