Тема 1. Способы построения диагностического пространства

Рассмотрим общую структуру системы диагностирования (рис. 1). На объект диагностирования (ОД) действуют внешние воздействия, приводящие к возникновению дефектов. Диагностические признаки (ДП), сформированные на основе модели ОД, подаются на блок, реализующий алгоритм принятия решения (АПР), который должен выдать сигнал о наличии или отсутствии дефекта.

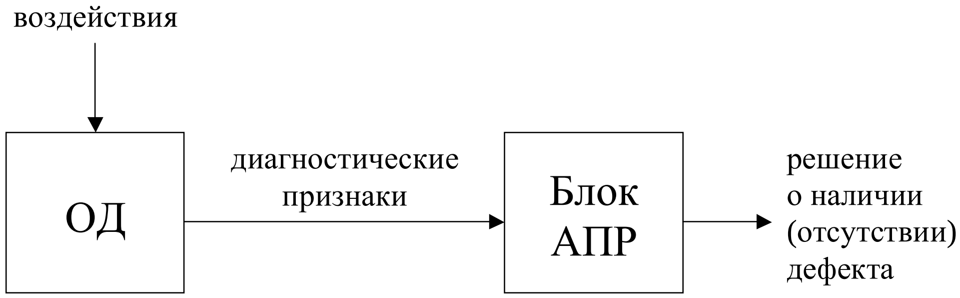


Рис. 1. Общая структура системы диагностирования.

Рассмотрим способы построения диагностического пространства.

Анализ существующих методов диагностирования позволяет выделить три основных подхода к формированию пространства ДП [3]:

1) применение теории инвариантов;
2) применение теории моделей;
3) использование избыточности.

Эти подходы не являются изолированными, а выступают в тесном взаимодействии, при этом следует отметить приоритетный характер первого принципа, как обобщающего другие и позволяющего с единых позиций представлять методологию диагностирования динамических систем.

Первый подход сводится к выявлению некоторых характеристик объекта, остающихся неизменными при нормальном функционировании ОД и изменяющихся при появлении дефектов. Эти характеристики (инварианты) используются в качестве прямых или косвенных диагностических признаков.

Второй подход опирается на использование моделей проверяемого объекта. С наибольшей очевидностью он проявляется в таких хорошо известных методах, как контроль на основе дублирования и резервирования, представляющих собой частные случаи контроля с помощью моделей, подключаемых параллельно объекту.

Третий подход связан с использованием различных видов избыточности:

– структурной и функциональной (наличие избыточного числа устройств и функций);
– естественной (наличие аналитических зависимостей между входом и выходом системы);
– искусственной (введение избыточных переменных);
– информационной (наличие априорной информации либо коррелированность измеряемых сигналов и др.).

1. Использование избыточности

1.1. Использование структурной избыточности

Рассмотрим ОД, включающий k датчиков, дублирующих друг друга, то есть измеряющих один и тот же параметр объекта. Выходные сигналы датчиков:

$$y_i(n) = h(n) + (u_i(n) b_i + m_i),\ u_i(n) \in N(0,1),\ i = 1..k,$$

где h – полезный сигнал,

u_i – шумы датчиков,

Разность одноименных параметров

Формирование диагностических признаков в случае $k = 2$ заключается в вычислении разности между показаниями датчиков в каждый момент времени:

$$z(n) = y_1(n) - y_2(n).$$

Типы дефектов:

1) изменение математического ожидания первого датчика $m_1' = m_1 + \Delta m_1$;

2) изменение дисперсии первого датчика $b_1' = b_1 + \Delta b_1$

3) изменение математического ожидания второго датчика $m_2' = m_2 + \Delta m_2$;

4) изменение дисперсии второго датчика $b_2' = b_2 + \Delta b_2$

Появление дефекта приводит к изменению свойств сигнала z, который в режиме нормального функционирования имеет нулевое математическое ожидание (при $m_1 = m_2$).

Структура системы формирования ДП при использовании структурной избыточности показана на рис. 2.

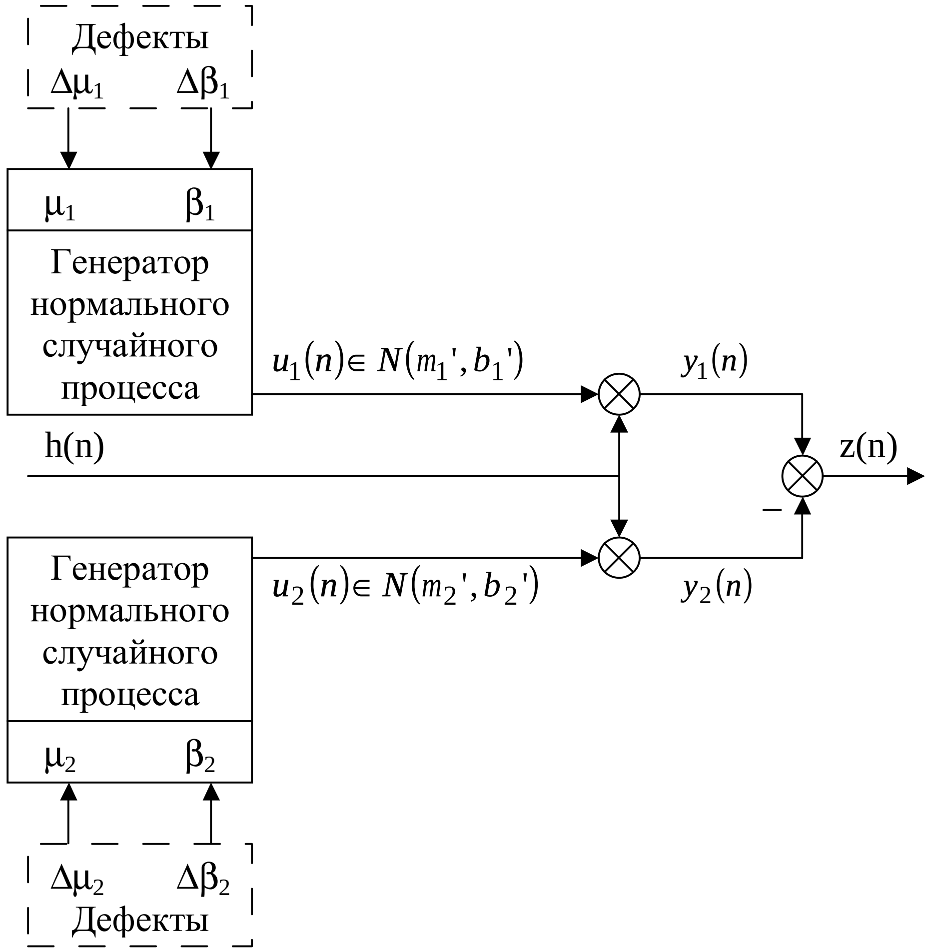


Рис. 2. Формирование ДП при использовании структурной избыточности.

Использование обобщенной статистики

Возможно формирование инварианта с использованием обобщенных статистик:
Среднее арифметическое

$$z_i(n) = y_i(n) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j(n)$$

Порядковое среднее

$$z_i(n) = y_i(n) - med\left\{y_1(n), y_2(n), \mathbf{K}, y_k(n)\right\}$$

Средневзвешенное

$$z_i(n) = y_i(n) - \sum_{j=1}^{k} g_j y_j(n),$$

$$\sum_{j=1}^{k} g_j = 1,$$

$$0 < g_j < 1,\ j = 1..k.$$

Пример: если датчики имеют разброс по точности (b_j), то

$$g_j = \frac{\frac{1}{b_j}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{b_i}}, \; j = 1..k.$$

1.2. Использование функциональной избыточности

В этом случае выходные сигналы ОД формируются с помощью измерений, основанных на разных физических принципах.

$$z_i(n) = F_1(y_i(n)) - F_2(y_i(n))$$

Функциональные преобразования F_1, F_2 применяется для получения оценок, аналогичных друг другу.

1.3. Использование естественной избыточности

Этот способ предполагает наличие некоторых математических соотношений, которые связывают выходные сигналы и остаются постоянными в процессе нормального функционирования объекта:

$$F(Y) = C,$$

$$Y = \{y_1, \ldots, y_k\}.$$

ДП формируется как

$$z = F(Y) - C.$$

При возникновении дефекта эти соотношения перестают выполняться:

$$F(Y) \neq C,$$

$$z = F(Y) - C \neq 0.$$

1.4. Использование искусственной избыточности

Данный способ предполагает формирование дополнительных контрольных соотношений, строго выполняемых при отсутствии дефектов.

Метод избыточных переменных

Объект диагностирования:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

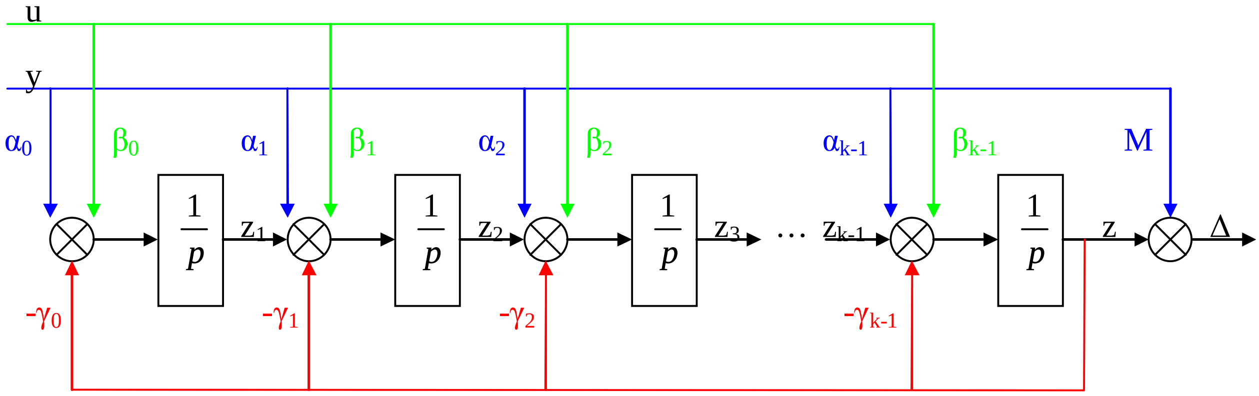
Устройство диагностирования (УД) вырабатывает сигнал z, который при любом входном сигнале u в любой момент времени удовлетворяет условию:

$$\Delta = My + z = 0,$$

где $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ – вектор постоянных коэффициентов.

Если в результате функционирования ОД произошло искажение его выходных сигналов по причине возникновения дефекта, это должно привести к нарушению контрольного уравнения $My + z = 0$ и появлению сигнала рассогласования $\Delta(t) \neq 0$.

Структура устройства диагностирования имеет следующий вид:



Чёрным обозначены сигналы (u, y, z, $z_1 \ldots z_{k-1}$, Δ),
цветом – множители ($\alpha_0 \ldots \alpha_{k-1}$, $\beta_0 \ldots \beta_{k-1}$, $\gamma_0 \ldots \gamma_{k-1}$, M).

$$\begin{cases} z = z_k \\ z_i = \dfrac{1}{p}\left(a_{i-1}y + b_{i-1}u - g_{i-1}z + z_{i-1}\right), i = 1..k \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Теорема о порядке устройства диагностирования

Минимальный порядок k устройства диагностирования заданного вида при любом входном сигнале u и любом векторе M равен индексу наблюдаемости проверяемой системы.

Индекс наблюдаемости $\nu_0 = \min\left\{\nu : rank\left[C^T \quad \mathbf{L} \quad \left(A^T\right)^\nu C^T\right] = n\right\}$,

где n – размерность вектора x.

Можно показать, что индекс наблюдаемости ν_0 системы произвольного порядка удовлетворяет неравенству:

$$\frac{n}{s} \le \nu_0 \le n - s + 1,$$

где s – размерность вектора y.

Методика синтеза устройства диагностирования

1) Найти минимальный порядок k устройства диагностирования;
2) Для заданного M решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} j_0 & \mathbf{L} & j_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \mathrm{M} \\ CA^k \end{bmatrix} = 0 \\ b_{j-1} = -\left[\sum_{i=j}^{k} j_i C A^{i-j} \right] B,\ j = 1..k \end{cases},$$

где $j_i = \begin{cases} a_i + g_i M, & i = 0..k-1 \\ M, & i = k \end{cases}$.

3) С помощью полученных значений a, b и g построить выходной сигнал $z = z_k$,

где $z_i = \frac{1}{p}\left(a_{i-1} y + b_{i-1} u - g_{i-1} z + z_{i-1}\right),\ i = 1..k$,

$z_0 = 0$

Скалярные коэффициенты g для упрощения структуры УД примем равными 0.

Пояснения к формулам

$$\underset{n\times1}{\dot{x}} = \underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times1}{x} + \underset{n\times r}{B}\,\underset{r\times1}{u}$$

$$\underset{s\times1}{y} = \underset{s\times n}{C}\,\underset{n\times1}{x}$$

$$\underset{1\times1}{\Delta} = \underset{1\times s}{M}\,\underset{s\times1}{y} + \underset{1\times1}{z} = 0,$$

$$\underset{1\times s}{j_i} = \underset{1\times s}{a_i} + \underset{1\times1}{g_i}\,\underset{1\times s}{M}$$

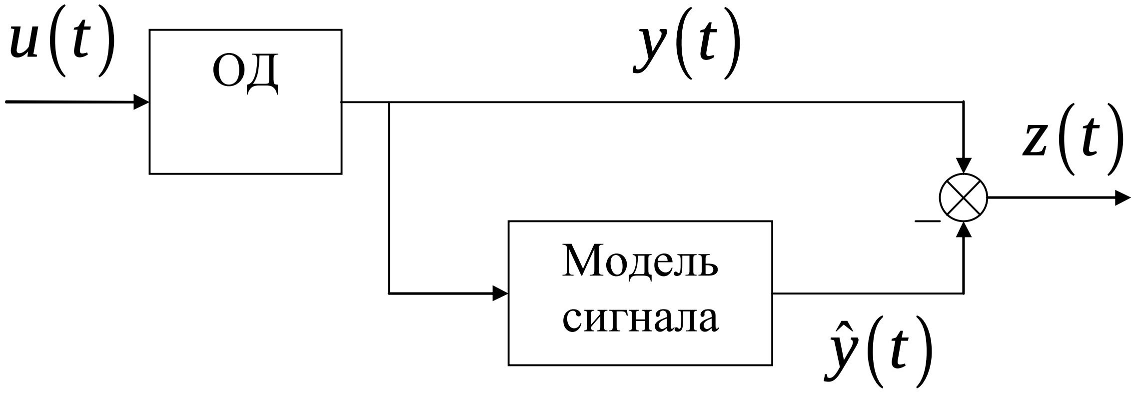
$$\underset{1\times(k+1)s}{\begin{bmatrix} \underset{1\times s}{j_0} & \mathbf{L} & \underset{1\times s}{j_k} \end{bmatrix}} \underset{(k+1)s\times n}{\begin{bmatrix} \underset{s\times n}{C} \\ \underset{s\times n}{C}\,\underset{n\times n}{A} \\ \mathrm{M} \\ \underset{s\times n}{C}\,\underset{n\times n}{A^k} \end{bmatrix}} = 0$$

$$\underset{1\times r}{b_{j-1}} = -\left[\sum_{i=j}^{k} \underset{1\times s}{j_i}\,\underset{s\times n}{C}\,\underset{n\times n}{A^{i-j}} \right] \underset{n\times r}{B}$$

$$\underset{1\times1}{z_i} = \frac{1}{p}\left(\underset{1\times s}{a_{i-1}}\,\underset{s\times1}{y} + \underset{1\times r}{b_{i-1}}\,\underset{r\times1}{u} - \underset{1\times1}{g_{i-1}}\,\underset{1\times1}{z} + \underset{1\times1}{z_{i-1}} \right)$$

2. Использование математических моделей

2.1. Использование математических моделей выходного сигнала



1) Усреднение:

$z = y - M[y]$

2) Экспоненциальное сглаживание:

$\hat{y}(n) = (1 - a)\hat{y}(n-1) + a y(n)$,

$0 < a < 1$ – коэффициент сглаживания,

$z(n) = y(n) - \hat{y}(n)$

3) Модель авторегрессии (АР)
4) Модель скользящего среднего (СС)
5) Модель авторегрессии – скользящего среднего (АРСС)
6) Интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего (ИАРСС)

Модель авторегрессии (АР)

$$\hat{y}(n) = m + \sum_{1}^{p} a_i\left(\hat{y}(n-i) - m\right) + b\,y(n),$$

где $a_1, \ldots, a_p$ – коэффициенты авторегрессии,

p – порядок авторегрессии,

m – математическое ожидание,

b – остаточная дисперсия,

$y(n) \in N(0,1)$.

Характеристическое уравнение:

$$a(t) = 1 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_p t^p = 0$$

Условие стационарности.

Для того чтобы процесс был стационарным, достаточно, чтобы все корни характеристического полинома лежали вне единичного круга в комплексной плоскости:

$$a(t)=0, |t|>1$$

Для АР(1):

$$-1<a_1<1$$

Для АР(2):

$$\begin{cases} a_1+a_2<1 \\ a_2-a_1<1 \\ -1<a_2<1 \end{cases}$$

Условие обратимости: отсутствует, нет ограничений.

Сезонные модели авторегрессии

С помощью АР-моделей можно моделировать сезонность. Например, при наличии квартальных данных и предположении о квартальной сезонности можно построить следующую сезонную модель авторегрессии САР(4):

$$\hat{y}(n)=a_4\hat{y}(n-4)+b\,y(n)$$

Фактически это обычная АР-модель с ограничением на параметры модели (равенство нулю некоторых параметров). На практике сезонность может сочетаться с обычной авторегрессией, например:

$$\hat{y}(n)=a_1\hat{y}(n-1)+a_4\hat{y}(n-4)+b\,y(n)$$

В некоторых случаях оказываются полезными сезонные модели, у которых случайная ошибка, подчиняется некоторому AR-процессу:

$$\hat{y}(n)=a_4\hat{y}(n-4)+b\,y(n)$$

$$y(n)=a_1y(n-1)+bu(n)$$

Модель скользящего среднего (СС)

$$\hat{y}(n)=m+\sum_{1}^{q}b_iy(n-i)+b\,y(n)$$

где $b_1,\mathbf{K},b_q$ – коэффициенты скользящего среднего,

q – порядок скользящего среднего,

m – математическое ожидание,

b – остаточная дисперсия,

$y(n)\in N(0,1)$.

Характеристическое уравнение:

$$b(t)=1-b_1t-b_2t^2-\mathbf{K}-b_qt^q=0$$

Условие стационарности: отсутствует, нет ограничений.

Условие обратимости:

$b(t) = 0, |t| > 1$

Для СС(1):

$-1 < b_1 < 1$

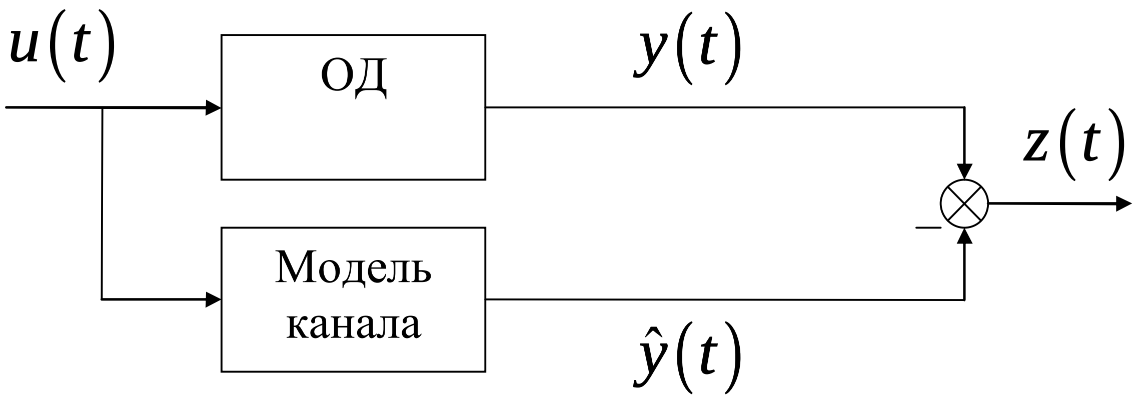
Для СС(2):

$$\begin{cases} b_1 + b_2 < 1 \\ b_2 - b_1 < 1 \\ -1 < b_2 < 1 \end{cases}$$

Модель авторегрессии – скользящего среднего (АРСС)

$$\hat{y}(n) = m + \sum_{1}^{p} a_i \left(\hat{y}(n-i) - m \right) + \sum_{1}^{q} b_i y(n-i) + b\, y(n)$$

2.2. Использование математических моделей канала



1) Линеаризация
2) Дискретизация
3) Редукция
4) Использование отдельных режимов

Редукция моделей

Варианты редукции моделей:
1) Отбрасывание составляющих, слабо влияющих на динамику объекта
2) Сокращение близких нулей и полюсов (модальный подход)
3) Отбрасывание переменных состояния, которые слабо изменяют поведение системы в целом
4) идентификация

Использование стационарного режима

Если изменение входных сигналов, приводящее к появлению переходных процессов в объекте, происходит редко, и большую часть времени объект работает при постоянных входных сигналах, то можно ограничиться проверкой правильности функционирования только в установившемся режиме.

Объект диагностирования:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Модель:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\hat{y} = Cx$$

Стационарный режим: $\dot{x} = 0$

$$\hat{y} = -CA^{-1}Bu$$

$$z = y - \hat{y}$$

2.3. Использование фильтра Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему с дискретным временем, описывающую ОД. Такая система в режиме нормального функционирования (при отсутствии дефектов) описывается линейными разностными уравнениями состояния и наблюдений. Уравнение состояния характеризует динамику системы, уравнение наблюдений определяет механизм образования данных, доступных измерению.

Уравнение состояния:

$$x(n+1) = Ax(n) + Fu_1(n), \qquad (2.1)$$

где $x(n)$ – вектор состояния системы в момент времени n,

A – переходная матрица системы,

F – переходная матрица возмущения системы,

$u_1(n) \in N(m_1, b_1)$ – шум возмущения – нормальный случайный процесс с математическим ожиданием m_1 и дисперсией b_1.

Уравнение наблюдений:

$$y(n) = Cx(n) + u_2(n), \qquad (2.2)$$

где $y(n)$ – вектор наблюдений системы в момент времени n,

C – матрица наблюдений системы,

$u_2(n) \in N(m_2, b_2)$ – шум измерения – нормальный случайный процесс с математическим ожиданием m_2 и дисперсией b_2.

Оптимальный алгоритм оценивания вектора состояния линейной системы, заданной уравнениями (2.1) и (2.2), описывается системой рекуррентных уравнений следующего вида.

Уравнение оценки:

$$\tilde{x}_{n+1} = A\tilde{x}_n + Fm_1 + K_{n+1}\left(y_{n+1} - C\left(A\tilde{x}_n + Fm_1\right)\right), \qquad (2.3)$$

где $\tilde{x}_n$ – оценка вектора состояния в момент времени n,

K_{n+1} – матричный коэффициент усиления фильтра:

$$K_{n+1} = Q_{n+1}C^T\left(CQ_{n+1}C^T + b_2\right)^{-1}, \qquad (2.4)$$

Q_{n+1} – корреляционная матрица ошибок экстраполяции:

$$Q_{n+1} = AP_n A^T + Fb_1 F^T \,, \tag{2.5}$$

P_{n+1} – корреляционная матрица ошибок фильтрации:

$$P_{n+1} = Q_{n+1} - K_{n+1} C Q_{n+1} \,. \tag{2.6}$$

Начальные условия:

$P_0 = b_2 E$, $\tilde{x}_0 = 0$,

где E – единичная матрица.

Оптимальный фильтр, алгоритм которого описывается уравнениями (2.3) – (2.6), называется фильтром Калмана (ФК).

Сравнивая выходы объекта и фильтра, можно построить сигналы следующего вида:

$$\tilde{z}_n = y_n - C\left(A\tilde{x}_n + Fm_1\right), \tag{2.7}$$

$$z_n = S_n^{-\frac{1}{2}} \tilde{z}_n$$

$$S_n = b_2 + CP_n C^T - b_2 K_n^T C^T - CK_n b_2 \,. \tag{2.8}$$

Величина $\tilde{z}_n$ называется n-ой невязкой измерений. Будем называть последовательность $\{\tilde{z}_n\}$ последовательностью обновления [4, 5]. Последовательность $\{z_n\}$ будем называть нормализованной обновляющей последовательностью, так как в режиме нормального функционирования (при отсутствии дефектов) она распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией: $z_n \in N(0{,}1)$.

Формирование диагностических признаков в этом случае заключается в вычислении нормализованной обновляющей последовательности в каждый момент времени.

Типы дефектов:

1) изменение математического ожидания в канале возмущения $m_1' = m_1 + \Delta m_1$;

2) изменение математического ожидания в канале измерения $m_2' = m_2 + \Delta m_2$;

3) изменение дисперсии в канале возмущения $b_1' = b_1 + \Delta b_1$;

4) изменение дисперсии в канале измерения $b_2' = b_2 + \Delta b_2$;

5) изменение A, F, C.

Структура системы формирования ДП показана на рис. 3.

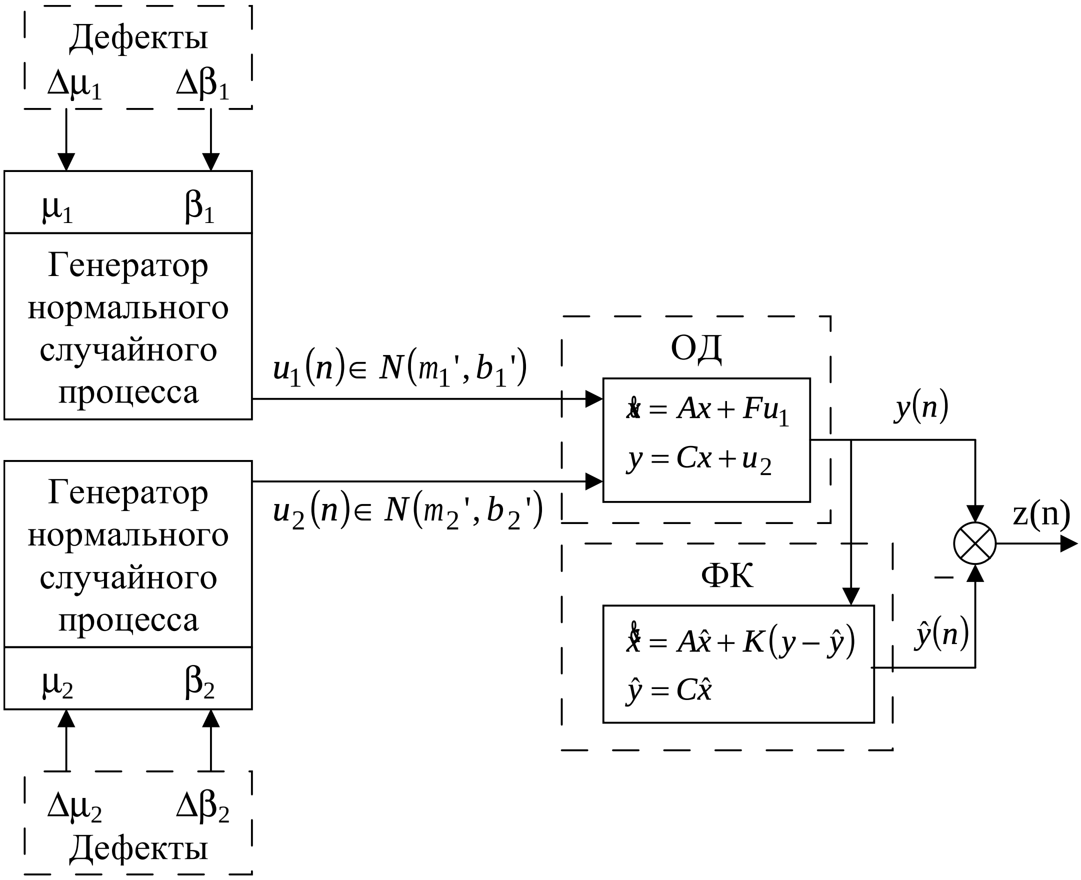


Рис. 3. Формирование ДП с использованием фильтра Калмана.

Применение процессов АР для описания ДП

Процесс авторегрессии порядка p, АР(p) [2]:

$$x_n = m + \sum_{1}^{p} a_i \left(x_{n-i} - m \right) + b g_n ,$$

где $g_n \in N(0,1)$ – случайный процесс с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией,

$a_1, \mathbf{K}, a_p$ – коэффициенты авторегрессии,

p – порядок авторегрессии,

m – математическое ожидание,

b – остаточная дисперсия.

Преобразование процесса АР(p) к матричному виду:

$$a = \lfloor a_1 \quad \dots \quad a_p \rfloor, \quad c = [c_1 \quad \dots \quad c_m], \quad A = \begin{bmatrix} & a \\ E_{p-1} & O_{p-1,1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ O_{p-1,1} \end{bmatrix},$$

$$C = \lfloor c^T \quad O_{m,p-1} \rfloor,$$

где $a_1, \mathbf{K}, a_p$ – коэффициенты авторегрессии,

p – порядок авторегрессии,

$c_1, \mathbf{K}, c_m$ – коэффициенты выхода,

m – размерность выхода,

E_n – единичная матрица размерности n,

$O_{n,m}$ – нулевая матрица размерности $n \times m$.

Использование обновляющих процессов для обнаружения дефектов

Если в системе происходят дефекты, то статистические характеристики процесса z_n изменяются, и эти изменения можно использовать для обнаружения дефектов. Методы обнаружения дефектов, использующие обновляющие процессы:

1) Проверка соответствия z_n белому шуму:

при отсутствии дефектов $z_n \in N(0,1)$.

2) Вычисление изменения корреляционной матрицы S_n:

$$l_n = \sum_{j=n-M+1}^{n} z_j^T S_j^{-1} z_j$$

При отсутствии дефектов $l_n \in c_q^2(M \cdot m)$ с доверительной вероятностью q.

3) Вычисление изменения среднего значения обновляющего процесса z_n:

Использование последовательных алгоритмов обнаружения изменения свойств случайного процесса, в том числе специальных, построенных на основании специфики фильтра Калмана.

2.4. Использование обнаруживающих фильтров

Для ОД синтезируется наблюдатель, невязка которого чувствительна к дефекту, то есть при разных дефектах вектор невязки принимает разные значения.

Фильтр Бирда

Объект диагностирования:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Модель объекта:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(y - C\hat{x}) + Bu$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

При отсутствии дефектов:

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{y} = y$$

Наличие погрешностей и дефектов в функционировании ОД приведет к появлению невязок:

$$\Delta = y - \hat{y} \neq 0$$

$$e = x - \hat{x} \neq 0$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - K(y - C\hat{x}) - Bu =$$

$$= A(x - \hat{x}) - KC(x - \hat{x}) = (A - KC)e$$

Пусть имеет место полная доступность вектора состояния для непосредственных измерений:

$$C = E$$

$$\Delta = e$$

$$\dot{\Delta} = \dot{e} = (A - K)e = (A - K)\Delta$$

Для исключения перекрестного влияния составляющих невязки друг на друга выберем

$$K = aE + A$$

Тогда

$$\dot{\Delta} = (A - aE - A)\Delta = -a\Delta$$

или в скалярной записи

$$\dot{\Delta}_j = -a\Delta_j,\ j = 1..n$$

Решение дифференциальных уравнений:

$$\Delta_j(t) = c_j e^{-at},\ j = 1..n$$

При отсутствии дефектов все невязки независимо стремятся к нулю, скорость стремления к нулю регулируется выбором коэффициента a .

Используя принятые допущения $C = E$, $K = aE + A$, получим:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(y - \hat{x}) + Bu =$$

$$= A\hat{x} + (aE + A)(y - \hat{x}) + Bu =$$

$$= -a\hat{x} + (aE + A)y + Bu =$$

$$= a(x - \hat{x}) + Ax + Bu$$

$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + (aE + A)y + Bu$ – фильтр Бирда

Обнаружение и локализация дефектов с помощью фильтра Бирда

В момент времени t_0 введем дефект, проявление которого эквивалентно искажению одного из столбцов в матрице B:

$$\dot{x} = Ax + Bu + vb_i$$

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + a(x - \hat{x})$$

для i столбца,

v – уровень ошибки.

$$\dot{\Delta} = vb_i - a\Delta$$

При $t < t_0$ $\Delta_j = 0,\ j = 1..n$

при $t \ge t_0$ $\dot{\Delta}_j + a\Delta_j = vb_{ij},\ j = 1..n$

Решение дифференциальных уравнений:

$$\Delta_j(t) = \frac{v}{a} b_{ij}\left(1 - e^{-a(t - t_0)}\right),\ j = 1..n$$

После окончания переходного процесса, вызванного появлением дефекта, через интервал времени $\dfrac{3}{a}$, можно записать:

$$\Delta = \frac{v}{a} b_i, \; t \geq t_0 + \frac{3}{a}$$

Таким образом, вектор невязок пропорционален i столбцу матрицы B. Для локализации таких дефектов достаточно определить, какому из столбцов матрицы B пропорционален вектор невязок.

Ограничения применения фильтра Бирда

Основные ограничения и упрощения, характерные для фильтра Бирда:
– датчики и исполнительные механизмы считаются безынерционными;
– дефекты предполагаются константными;
– обработка данных в устройстве диагностирования считается надежной;
– число датчиков равно числу компонент обобщенного вектора состояний;
– размерность устройства диагностирования равна размерности ОД.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бендерская Е.Н., Колесников Д.Н., Пахомова В.И. Функциональная диагностика систем управления: Учебное пособие / СПбГТУ. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 143 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
3. Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем. – М. СПб.: Изд-во МГУ. Гриф, 1998. – 255 с.
4. Kailath T. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. I: Linear Filtering in Additive Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 646-655.
5. Kailath T., Frost P. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. II: Linear Smoothing in Additive White Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 655-660.