Тема 3. Обнаружение изменений свойств случайного процесса с использованием фильтра Калмана

Подробное описание фильтра Калмана – см. тему 1 «Способы построения диагностического пространства».

Объект диагностирования:

$x(n+1) = Ax(n) + Fu_1(n)$,

$y(n) = Cx(n) + u_2(n)$,

$u_1(n) \in N(m_1, b_1)$ – шум возмущения,

$u_2(n) \in N(m_2, b_2)$ – шум измерения.

Оптимальный алгоритм оценивания вектора состояния (фильтр Калмана):

Уравнение оценки:

$\tilde{x}_{n+1} = A\tilde{x}_n + Fm_1 + K_{n+1}\left(y_{n+1} - C\left(A\tilde{x}_n + Fm_1\right)\right)$,

$K_{n+1} = \ldots$ – матричный коэффициент усиления фильтра,

$Q_{n+1} = \ldots$ – корреляционная матрица ошибок экстраполяции,

$P_{n+1} = \ldots$ – корреляционная матрица ошибок фильтрации.

Обновляющая последовательность:

$\tilde{z}_n = y_n - C\left(A\tilde{x}_n + Fm_1\right)$,

Нормализованная о бновляющая последовательность:

$$z_n = S_n^{-\frac{1}{2}}\tilde{z}_n$$

$$S_n = b_2 + CP_nC^T - b_2K_n^TC^T - CK_nb_2 .$$

Использование обновляющих процессов для обнаружения дефектов

Если в системе происходят дефекты, то статистические характеристики процесса z_n изменяются, и эти изменения можно использовать для обнаружения дефектов. Методы обнаружения дефектов, использующие обновляющие процессы:

1) Проверка соответствия z_n белому шуму:

при отсутствии дефектов $z_n \in N(0,1)$.

2) Вычисление изменения корреляционной матрицы S_n:

$$l_n = \sum_{j=n-M+1}^{n} z_j^T S_j^{-1} z_j$$

При отсутствии дефектов $l_n \in c_q^2(M \cdot m)$ с доверительной вероятностью q.

3) Вычисление изменения среднего значения обновляющего процесса z_n:

Использование последовательных алгоритмов обнаружения изменения свойств случайного процесса, в том числе специальных, использующих специфику фильтра Калмана.

Алгоритм Керра

В данном алгоритме при расчете решающей функции используются промежуточные переменные Фильтра Калмана [7]:

$$R_{n+1} = AR_n A^T + Fb_1 F^T,$$

$$m_{n+1} = Am_n,$$

начальные условия: $m_0 = \tilde{x}_0$, $R_0 = b_1 E$.

Решающая функция рассчитывается следующим образом:

$$G(n+1) = \left(x^*_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}\right)^T Q^{-1}_{n+1} \left(x^*_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}\right),$$

где $x^*_{n+1} = (1 - l_{n+1}) R_{n+1} L^{-1}_{n+1} \tilde{x}_{n+1} + l_{n+1} Q_{n+1} L^{-1}_{n+1} m_{n+1}$, (2.48)

$$L_{n+1} = (1 - l_{n+1}) R_{n+1} + l_{n+1} Q_{n+1},$$

l_{n+1} определяется следующим рекуррентным алгоритмом:

$$l^{(k+1)}_{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{W^T_{n+1} L^{(k)}_{n+1} Q_{n+1} L^{(k)}_{n+1} W_{n+1}}{W^T_{n+1} L^{(k)}_{n+1} W_{n+1}}},$$

где $L^{(k)}_{n+1} = \left[\left(1 - l^{(k)}_{n+1}\right) R_{n+1} + l^{(k)}_{n+1} Q_{n+1}\right]^{-1}$,

$$W_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} - m_{n+1}.$$

Начальное значение: $l^{(0)}_{n+1} = \dfrac{3}{4}$.

Правило остановки: $\left| l^{(k+1)}_{n+1} - l^{(k)}_{n+1} \right| < 10^{-6} \left| l^{(k)}_{n+1} \right|$.

Алгоритм, основанный на проверке нормализованной обновляющей матрицы

В алгоритме, основанном на проверке нормализованной обновляющей матрицы (АНОМ), на каждом шаге формируется нормализованная обновляющая матрица A_n, составленная, из векторов z, соответствующим R разным моментам времени [3]:

$$A_n = \left[z_{n-R+1} \quad \dots \quad z_n\right],$$

где $R \geq 2$ – глубина памяти обновляющей матрицы,

Решающая функция рассчитывается следующим образом:

$$G(n) = \frac{1}{M} \sum_{n-M+1}^{n} \sqrt{\max l \left\{A^T_n A_n\right\}},$$

где $l\{A\}$ – собственные числа матрицы A.

Порог срабатывания алгоритма:

$$h = \sqrt{\max(m, R)},$$

где m – размерность вектора $z(n)$.

Решение о наличии или отсутствии дефекта в каждый момент времени принимается на основе результатов сравнения:

$h < G < 2h$ => дефекта нет,

$G \geq 2h, G \leq h$ => есть дефект.

Многоканальный фильтр Калмана

Многоканальный ФК описывается следующим образом [2, 4].

Уравнение оценки:

$$\tilde{x}_{n+1} = A\tilde{x}_n + Fm_1 + K_{n+1}\left(y_{n+1} - C\left(A\tilde{x}_n + Fm_1\right)\right),$$

где $\tilde{x}_n$ – оценка вектора состояния в момент времени n,

K_{n+1} – матричный коэффициент усиления фильтра:

$$K_{n+1} = P_{n+1}C^T b_2^{-2},$$

P_{n+1} – корреляционная матрица ошибок фильтрации:

$$P_{n+1} = Q_{n+1}\left(E + rC^T b_2^{-2} C Q_{n+1}\right)^{-1},$$

Q_{n+1} – корреляционная матрица ошибок экстраполяции:

$$Q_{n+1} = AP_n A^T + Fb_1 F^T,$$

E – единичная матрица соответствующей размерности,

r – число каналов.

Алгоритм, основанный на проверке нормализованной обновляющей матрицы (АНОМ) для многоканального ФК.

В данном алгоритме на каждом шаге формируется нормализованная обновляющая матрица A_n, составленная, из векторов z различных каналов, соответствующих одному и тому же моменту времени [2]:

$$A_n = \left[z_n^1 \quad \ldots \quad z_n^r\right],$$

где z_n^i – нормализованная обновляющая последовательность i канала.

Решающая функция рассчитывается следующим образом:

$$G(n) = \frac{1}{M} \sum_{n-M+1}^{n} \sqrt{\max l\left\{A_n^T A_n\right\}},$$

где $l\{A\}$ – собственные числа матрицы A.

Порог срабатывания алгоритма:

$$h = \sqrt{\max(m, r)},$$

где m – размерность вектора $z(n)$.

Решение о наличии или отсутствии дефекта в каждый момент времени принимается на основе результатов сравнения:

$h < G < 2h$ => дефекта нет,

$G \geq 2h, G \leq h$ => есть дефект.

Локализация дефекта в многоканальном фильтре Калмана

С помощью двух алгоритмов, основанных на проверке нормализованной обновляющей матрицы, можно построить алгоритм локализации канала с дефектом в многоканальном ФК [2].

Обозначим $A_{мн}$ – алгоритм для многоканального ФК, $A_{одн}$ – алгоритм для одноканального ФК.

Допустим, что $A_{мн}$ выявил дефект. Для диагностирования используем самый простой метод поиска неисправностей – метод половинного разбиения. Имеющиеся r фильтров Калмана, по которым осуществляется многоканальное оценивание, разобьем на две равные группы по $r/2$ фильтров в каждой и для одной из них снова применим $A_{мн}$. В результате, будем знать, в какой группе находится дефект. Продолжим процедуру деления фильтров до тех пор, пока полученный после деления фильтр не будет состоять из двух каналов. Далее для обнаружения отказа используем $A_{одн}$. В результате будет установлен отказавший канал фильтрации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бендерская Е.Н., Колесников Д.Н., Пахомова В.И. Функциональная диагностика систем управления: Учебное пособие / СПбГТУ. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 143 с.
2. Гаджиев Ч.М. Контроль и диагностика многоканального фильтра Калмана // Электронное моделирование. – 2000. – т.22, №1. – с. 80-85.
3. Гаджиев Ч.М. Новый метод проверки статистических характеристик обновляющей последовательности фильтра Калмана // Электронное моделирование. – 1996. – т.18, №1. – с. 49-54.
4. Гришин Ю.П. Алгоритмы многоканальной калмановской фильтрации // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1982. – т.XXV, №4. – с. 49-54.
5. Kailath T. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. I: Linear Filtering in Additive Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 646-655.
6. Kailath T., Frost P. An Innovations Approach to Least-Squares Estimation, Pt. II: Linear Smoothing in Additive White Noise // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1968. – vol. AC-13, №6. – p. 655-660.
7. Kerr T.H. Real-Time Failure Detection: A Nonlinear Optimization Problem That Yields a Two-Ellipsoid Overlap Test // Journal Of Optimization Theory And Applications. – 1977. – vol. 22, №4. – p. 509-536.