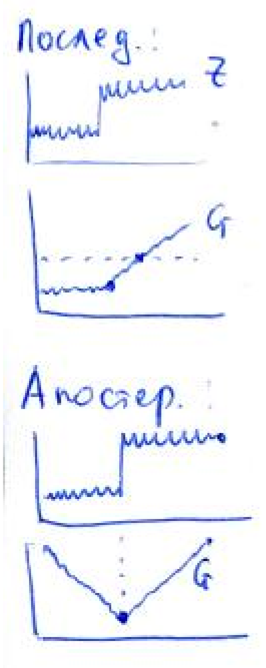
Тема 4. Апостериорные алгоритмы обнаружения изменения свойств случайного процесса

По способу получения информации об объекте диагноза различают апостериорный и последовательный анализ.

Алгоритмы обнаружения изменения свойств случайного процесса

Последовательные алгоритмы на каждом шаге используют информацию, полученную на предыдущих шагах, для определения факта разладки

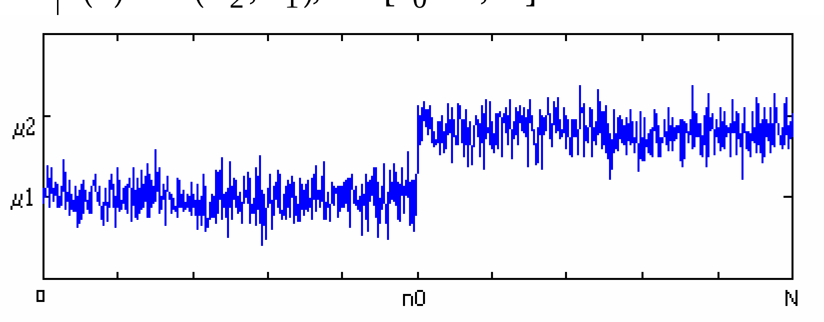
Апостериорные алгоритмы используют всю информацию для определения момента разладки



Типы дефектов

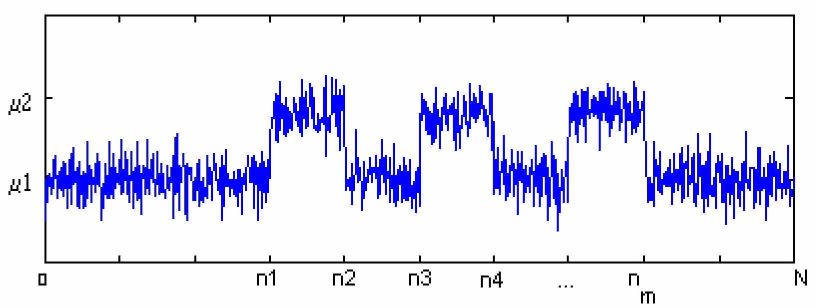
Дефект 1: однократное скачкообразное изменение математического ожидания.

$$\begin{cases} z(n) \in N(m_1, b_1), n \in [0, n_0] \\ z(n) \in N(m_2, b_1), n \in [n_0+1, N] \end{cases}$$



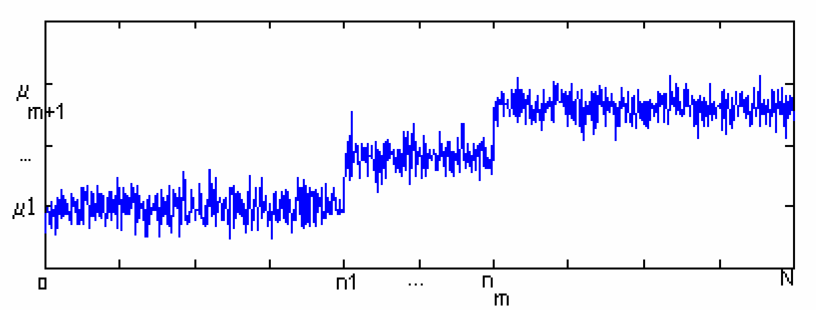
Дефект 2: восстанавливаемое скачкообразное изменение математического ожидания.

$$\left|\begin{array}{l} z(n)\in N(m_1,b_1), n\in[0,n_1] \\ z(n)\in N(m_2,b_1), n\in[n_1+1,n_2] \\ z(n)\in N(m_1,b_1), n\in[n_2+1,n_3] \\ z(n)\in N(m_2,b_1), n\in[n_3+1,n_4] \\ \mathbf{L} \\ z(n)\in N(m_1,b_1), n\in[n_m+1,N] \end{array}\right.$$



Дефект 3: неоднократное скачкообразное изменение математического ожидания.

$$\left|\begin{array}{l} z(n)\in N(m_1,b_1), n\in[0,n_1] \\ z(n)\in N(m_2,b_1), n\in[n_1+1,n_2] \\ z(n)\in N(m_3,b_1), n\in[n_2+1,n_3] \\ z(n)\in N(m_4,b_1), n\in[n_3+1,n_4] \\ \mathbf{L} \\ z(n)\in N(m_{m+1},b_1), n\in[n_m+1,N] \end{array}\right.$$



Дефект 4: однократное плавное изменение математического ожидания.

$$\left|\begin{array}{l} z(n)\in N(m_1,b_1), n\in[0,n_0] \\ z(n)=g(n)+\dfrac{m_2-m_1}{\Delta}(n-n_0),\ g(n)\in N(0,b_1), n\in[n_0,n_0+\Delta] \\ z(n)\in N(m_2,b_1), n\in[n_0+\Delta,N] \end{array}\right.$$

Апостериорные алгоритмы

1. Алгоритм, использующий статистику Манна-Уитни

Обнаруживает: дефект 1.

Алгоритм, использующий статистику Манна-Уитни [1]:

$$t_{ik} = \begin{cases} 1, z_i \geq z_k \\ 0, z_i < z_k \end{cases}$$

$$G(n) = \frac{\sum_{k=n+1}^{N} \sum_{i=1}^{n} t_{ik}}{n(N-n)}$$

$$\hat{n}_0 = \arg \min_{[aN] \leq n \leq [N-aN]} G(n),\ m_1 < m_2$$

$$\hat{n}_0 = \arg \max_{[aN] \leq n \leq [N-aN]} G(n),\ m_1 > m_2$$

$\hat{n}_0$ – оценка момента возникновения дефекта.

2. Общий случай алгоритма Бродского-Дарховского

Общий случай алгоритма Бродского-Дарховского [2]:

$$Y(n) = \left[\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\right]^{n} \left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} z_i - \frac{1}{N-n}\sum_{n+1}^{N} z_i\right),$$

$$0 \leq n \leq 1,$$

$$\hat{n}_0 = \arg \max_{[aN] \leq n \leq [bN]} |Y(n)|,$$

$$0 < a < \frac{1}{2} < b < 1$$

$\hat{n}_0$ – оценка момента возникновения дефекта.

Асимптотически наилучший метод в смысле вероятности ложных обнаружений: $n = 1$.

Асимптотически наилучший метод в смысле вероятности ложного спокойствия: $n = 0$.

Асимптотически минимаксный метод: $n = \frac{1}{2}$.

3. Алгоритм Бродского-Дарховского №1

Обнаруживает: дефект 1, дефект 2.

Алгоритм Бродского-Дарховского №1 [5] ($n = 1$):

$$Y(n) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} z_i - \frac{1}{N-n}\sum_{n+1}^{N} z_i\right),$$

$$G = \max_{1 \le n \le N-1} \left|Y(n)\right|,$$

$G < h$ => дефекта нет,

$G \ge h$ => есть дефект,

где $h > 0$ – порог срабатывания.

По функции $Y(n)$ строится функция $T^{(1)}(n)$, на её основе – множества $A_i^{(1)}(n)$, исходя из которых получаются оценка количества моментов возникновения дефектов $\tilde{k}$ и оценки моментов возникновения дефектов $\hat{n}_1, \hat{n}_2, ..., \hat{n}_{\tilde{k}}$:

$$T(n) = Y\left(n + [eN]\right) - Y(n), \; 0 < e < \frac{d}{4}$$

$$\hat{n}_1 = \begin{cases} \min A_1, \; A_1 \ne \varnothing \\ N, \; A_1 = \varnothing \end{cases},$$

где $A_1 = \left\{ n \ge 1 : sign\left(T(n)\right) \ne sign\left(T(n+1)\right) \right\}$

$$\hat{n}_i = \begin{cases} \min A_i, \; A_i \ne \varnothing \\ N, \; A_i = \varnothing \end{cases},$$

где $A_i = \left\{ n \ge \hat{n}_{i+1} + [dN/2] : sign\left(T(n)\right) \ne sign\left(T(n+1)\right) \right\},$

$i = 2..\tilde{k}$

$\tilde{k} = \min\left\{ s : \hat{n}_s = N \right\} - 1$

4. Алгоритм Бродского-Дарховского №2

Обнаруживает: дефект 1, дефект 2, дефект 3.

Алгоритм Бродского-Дарховского №2[3, 4]:

$$Y(n) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} z_i - \frac{1}{N-n}\sum_{n+1}^{N} z_i\right),$$

$$G = \max_{1 \le n \le N-1} \left|Y(n)\right|,$$

$G < h$ => дефекта нет,

$G \ge h$ => есть дефект,

где $h > 0$ – порог срабатывания.

По функции $Y(n)$ строится функция $T^{(2)}(n)$, на её основе – множества $A_i^{(2)}(n)$, исходя из которых получаются оценка количества моментов возникновения дефектов $\tilde{k}$ и оценки моментов возникновения дефектов $\hat{n}_1, \hat{n}_2, ..., \hat{n}_{\tilde{k}}$:

$$
\left|
\begin{array}{l}
T(n) = Y(n + [eN]) - 2Y(n) + Y(n - [eN]),\ 0 < e < \dfrac{d}{4} \\
\hat{n}_1 = \begin{cases} \min A_1,\ A_1 \neq \varnothing \\ \quad N,\ A_1 = \varnothing \end{cases}, \\
\text{где } A_1 = \left\{ [dN] \le n < N - [dN] : |T(n)| > 4eh \right\} \\
\hat{n}_i = \begin{cases} \min A_i,\ A_i \neq \varnothing \\ \quad N,\ A_i = \varnothing \end{cases}, \\
\text{где } A_i = \left\{ \hat{n}_{i+1} + [dN/2] \le n < N - [dN] : |T(n)| > 4eh \right\},\ i = 2..\tilde{k} \\
\tilde{k} = \min\{ s : \hat{n}_s = N \} - 1
\end{array}
\right.
$$

5. Алгоритм Дарховского

Обнаруживает: дефект 4, дефект 1 (при $\Delta = 1$).

Алгоритм Дарховского [6]:
Пусть z_j принимает значения $a_1 \mathbf{K}\, a_k$.
Тогда, если Δ известна:

$$
Y(n) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_j(i) - \frac{1}{N - n - \Delta} \sum_{i=n+\Delta+1}^{N} x_j(i) \right)^2,
$$

$$
x_j(i) = \begin{cases} 1, z_i' = a_j \\ 0, z_i' \neq a_j \end{cases},
$$

z_i' – значение сигнала z_i, «округленное» до ближайшего уровня $a_1 \mathbf{K}\, a_k$

Анализируя максимум $Y(n)$, определяется оценка момента возникновения дефекта $\hat{n}_0$:

$$
\left|
\begin{array}{l}
M = \left\{ \arg\max\limits_{a \le t \le b} Y(tN) \right\} \\
0 < a \le \dfrac{n_0}{N} \le \dfrac{n_0 + \Delta}{N} \le b < 1 \\
\hat{q}_0 \in M \\
\hat{n}_0 = \hat{q}_0 \cdot N
\end{array}
\right.
$$

Если Δ неизвестна, то все намного сложнее.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дарховский Б.С. Непараметрический метод для апостериорного обнаружения момента “разладки” последовательности независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – т.21, №1. – с. 180-184.
2. Бродский Б.Е., Дарховский Б.С. Асимптотический анализ некоторых оценок в апостериорной задаче о разладке // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – т.35, №3. – с. 551-557.
3. Бродский Б.Е., Дарховский Б.С. Алгоритм апостериорного обнаружения многократных разладок случайной последовательности // Автоматика и телемеханика. – 1993. – №1. – с. 62-67.
4. Бродский Б.Е., Дарховский Б.С. Проблемы и методы вероятностной диагностики // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №8. – с. 3-50.
5. Бродский Б.Е., Дарховский Б.С. Непараметрический метод обнаружения моментов переключения двух случайных последовательностей // Автоматика и телемеханика. – 1989. – №10. – с. 66-74.
6. Дарховский Б.С. Общий метод оценивания момента изменения вероятностных характеристик случайной последовательности // Статистические проблемы управления. – 1984. – вып.65. – с. 76-82.