

Методы идентификации

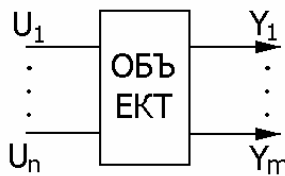
Введение

Идентификацией называется нахождение оптимальной в некотором смысле модели, построенной по результатам наблюдений над входными и выходными переменными объекта.

Задачи идентификации

Задачей идентификации называется обратная задача системного синтеза.

$$A_M = f(U, Y)$$



Задача идентификации

Среди задач идентификации выделяют два типа:

1. Структурная идентификация (в широком смысле слова);
2. Параметрическая идентификация (идентификация в узком смысле слова).

Классификация методов идентификации

Возможные различные методы идентификации существенно зависят от разных форм представления математических моделей – обыкновенных дифференциальных, разностных уравнений, уравнений свертки и т.д. При этом ни один из методов идентификации не является универсальным для идентификации всех видов математических моделей, а используется в отдельных областях применения.

Методы идентификации можно классифицировать по различным признакам.

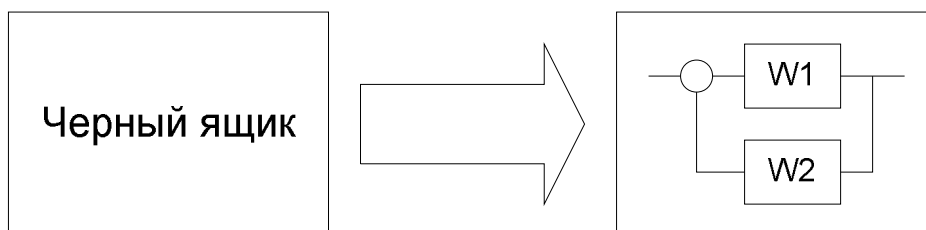
По способу тестирования различают активные и пассивные методы идентификации. В активных методах на вход объекта подаются специально сформированные воздействия - тестовые сигналы - детерминированного или случайного характера. Достоинствами этого подхода являются минимальные требования к априорным сведениям об объекте, целенаправленный характер идентификации, и, как следствие, уменьшение временных и материальных затрат на проведение эксперимента.

При использовании пассивных методов объект находится в условиях нормального функционирования, и параметры модели отыскиваются по результатам статистической обработки наблюдений. Преимуществами этого подхода является отсутствие необходимости проводить специальные исследования объекта, достаточно лишь измерение наблюдаемых сигналов в режиме рабочего функционирования объекта с последующим расчетом параметров модели. Недостатками такого подхода являются значительные временные затраты на сбор и необходимую статистическую обработку данных и жесткие требования к частотному спектру входного воздействия – он не должен быть меньше полосы частот динамической характеристики идентифицируемого объекта.

По характеру используемых сигналов различают детерминированные и статистические методы. При проведении активной идентификации на основе детерминированных сигналов возможно применение детерминированных методов идентификации. В реальных условиях сигналы всегда подвержены действию помех и сильно зашумлены, и детерминированные алгоритмы необходимо дополнять статистическим усреднением (сглаживанием) получаемых результатов.

По признаку временных затрат методы делятся на оперативные и ретроспективные. При оперативной идентификации обеспечивается текущее отслеживание меняющихся характеристик объекта. На основе рекуррентных алгоритмов, реализуемых в темпе, близком к скорости протекания процесса, оценки параметров моделей уточняются в реальном времени на каждом шаге поступления новых измерений. При ретроспективной идентификации вначале собирается весь массив данных, и оценки характеристик или параметров получаются после обработки этого массива.

Структурная идентификация



Подразумевает построение модели типа «черный ящик», т.е. об объекте мы ничего не знаем. Главная задача: определение структуры модели.

Рекомендации по решению задач структурной идентификации:

1. Определить тип (класс) моделей.

а) Начинать построение модели с физической модели (по известным законам физики, не забывая о цели построения модели);

б) Начинать с самых простых моделей (линейная, непрерывная, одномерная и т.д.);

в) Постараться преобразовать модель к виду линейной регрессии:

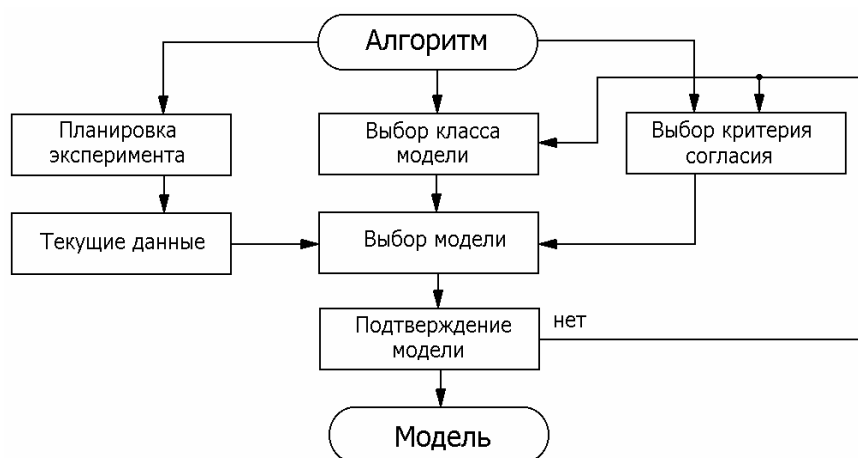
$$y_i = a_0 + a_1 \cdot u_1 + \dots + a_n \cdot u_n$$

2. Определение размера или порядка модели (определение количества внутренних переменных модели). Определение ковариационных (зависимость от шумовых характеристик) и корреляционных (взаимосвязь между определенными двумя внутренними переменными) матриц.

На сегодняшний момент существует несколько методов исследования ковариационных и корреляционных матриц, которые позволяют определить недостаточность или избыточность модели.

3. Параметрическая идентификация (способ параметризации модели).

Общая схема идентификации модели



Текущие данные

Могут быть получены в результате пассивного или активного эксперимента. Пассивный эксперимент, когда исследователь не влияет на процедуру регистрации (изменения) данных. Активный эксперимент, когда исследователь формирует программу эксперимента.

Методы программирования эксперимента исследует специальная область в ТАУ. В результате активного эксперимента упрощается процедура идентификации.

Выбор класса модели

Сначала определяются параметры: $F = (L, H, M)$, где L - линейность, H - непрерывность, M - многомерность. Любое из этих значений может принимать либо 0, либо 1. Самая простая модель – $F = (L = 1, H = 1, M = 0)$.

Выбор критерия согласия

Выходы объекта: $y_i = f(x, a) + e_i, i = \overline{1, n}$

где e_i – шум измерения i переменной.

Выходы модели: $y_i^M = f_M(x, a)$

Ошибки по отдельным переменным: $e_i = y_i - y_i^M$

Ошибка системы: $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \text{М} \\ e_n \end{bmatrix}$

1. Априорная информация: отсутствует.

Используется метод наименьших квадратов (МНК).

Критерий согласия J по методу наименьших квадратов имеет вид:

$$J = E^T \cdot I \cdot E \rightarrow \min ,$$

где I – единичная матрица.

2. Априорная информация:

– ковариационная матрица шума Q :

$$Q = \begin{bmatrix} M[e_1 e_1] & \text{Л} & M[e_1 e_n] \\ \text{М} & & \text{М} \\ M[e_n e_1] & \text{Л} & M[e_n e_n] \end{bmatrix}$$

Используются марковские оценки (обобщенный метод наименьших квадратов):

$$J = E^T \cdot Q \cdot E \rightarrow \min$$

3. Априорная информация:

– ковариационная матрица шума Q ,

– информация о влиянии переменных y_i друг на друга, например, совместное распределение вероятностей $p\{y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n\}$, зависящее от параметров a .

Используется метод максимального правдоподобия:

$$a = \arg \max_a L\{c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n; a\},$$

где $L\{c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n; a\}$ – функция правдоподобия, $c_1, c_2, \mathbf{K}, c_n$ – измеренные значения выходных переменных $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n$.

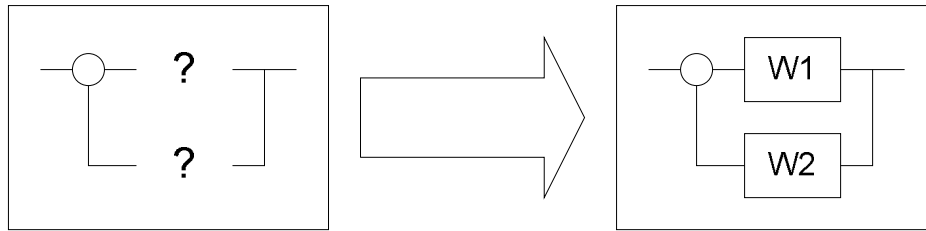
4. Априорная информация:

- ковариационная матрица шума Q ,
- информация о влиянии переменных y_i друг на друга (совместное распределение вероятностей $p\{y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n\}$)
- плотности распределения x, e_i, a .

Используется метод минимального среднего риска.

[Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 681 с.]

Параметрическая идентификация



Свойства идентификации: управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.
Рассмотрим систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

порядок системы n .

Управляемость – система управляема, если для любого момента времени при любых состояниях существует такое управление u , которое переводит начальное состояние системы в конечное за ограниченное время.

$$D_y = \begin{bmatrix} B & AB & L & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Условие управляемости системы: $rank(D_y) = n$.

Наблюдаемость – система наблюдаема, если любое или все ее состояния можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы.

$$D_n = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & L & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

Условие наблюдаемости системы: $rank(D_n) = n$.

Идентифицируемость – система идентифицируема, если по измерениям координат состояния системы можно определить ее параметры.

В простейшем случае

$$D_u = \begin{bmatrix} x_0 & Ax_0 & L & A^{n-1}x_0 \end{bmatrix},$$

где x_0 – вектор начальных условий.

Условие идентифицируемости системы: $rank(D_u) = n$.

Схемы параметрической идентификации

Явная схема	Итерационная схема
$\frac{\partial J}{\partial A} = 0$ - Явные методы (использование явных методов). - Требует дополнительных затрат на накопление информации. - Результаты идентификации (матрица коэффициентов) получается сразу же в процессе вычислений.	$\frac{\partial J}{\partial A} \rightarrow 0$ - Итерационные методы. - Нет дополнительных затрат на накопление информации. $A_M^i - A_M^{i+1} \leq e$

Идентификация линейной регрессионной модели



Схема одномерной системы

$$1. y_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

$$A = [a_1 \quad \mathbf{L} \quad a_n]$$

В течение времени будет снято k измерений, а также матрица

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \mathbf{L} & x_1(k) \\ x_2(1) & x_2(2) & \mathbf{L} & x_2(k) \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbf{L} & \mathbb{M} \\ x_n(1) & x_n(2) & \mathbf{L} & x_n(k) \end{bmatrix}$$

Выходной вектор $Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \mathbb{M} \\ y(k) \end{bmatrix}$

Используем ошибку $E = \sum_{i=1}^k (y_i - y_{Mi})^2 \rightarrow \min$, где y_i – выходная переменная объекта;

y_{Mi} – выходная переменная модели.

1) использование метода наименьших квадратов.

$$\min_a \left(E = \sum_{i=1}^k (y_i - y_{Mi})^2 = \sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{j=1}^n a_j x_j(i) \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{g=1}^n a_g x_g(i) \right) x_j(i) = 0$$

$$Y^T X^T - A X X^T = 0$$

$$A = Y^T X^T [X X^T]^{-1}$$

2) использование обобщенного метода наименьших квадратов.

$$A = Y^T X^T [X Q^{-1} X^T]^{-1}$$

$$2. y_m = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

$$A^* = [a_0 \quad a_1 \quad \mathbf{L} \quad a_n]$$

Для того чтобы получить a_0 , исходная матрица X дополняется единичным столбцом:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ & X & & \end{bmatrix}$$

$$A^* = Y^T X^{*T} [X^* X^{*T}]^{-1}$$

$$3. y_m = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + \dots$$

Обозначим $x_{n+1} = x_1^2$, $x_{n+2} = x_1 x_2$, ... и получим классическую модель:

$$y_m = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i, \quad m \geq n$$

Линейный регрессионный анализ для многомерных систем

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{10} + \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \mathbb{M} \\ y_r = a_{r0} + \sum_{i=1}^n a_{ri} x_i \end{array} \right.$$

Искомая модель, параметры которой надо определить, становится матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbb{M} & & & & \mathbb{M} \\ a_{r0} & a_{r1} & a_{r2} & \mathbf{L} & a_{rm} \end{bmatrix},$$

где n – количество входных переменных, r – количество выходных переменных.

Измерения с входов и выходов сформируем в следующих матрицах:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ x_1(1) & x_1(2) & & x_1(k) \\ \mathbb{M} & & & \mathbb{M} \\ x_n(1) & x_n(2) & \mathbf{L} & x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \mathbf{L} & y_r(1) \\ \mathbb{M} & & & \mathbb{M} \\ y_1(k) & y_2(k) & \mathbf{L} & y_r(k) \end{bmatrix}$$

$$A = Y^T X^T [X X^T]^{-1}$$

Требования к k (количеству измерений) состоят в том, что для адекватности модели необходимо, чтобы $k \geq n \cdot r$.

Планирование эксперимента

План эксперимента – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям. В более общем смысле под планированием эксперимента понимают всю совокупность действий, направленных на разработку стратегии экспериментирования от начальных до заключительных этапов изучения объекта исследования (от получения априорной информации до создания работоспособной математической модели или определения оптимальных условий). Иными словами, планирование эксперимента – это целенаправленное управление, которое реализуется в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

Пассивным экспериментом называют эксперимент, в котором регистрация входных и выходных данных осуществляется в рабочем режиме, не используя дополнительных вмешательств. Он применяется тогда, когда структура модели хорошо известна и ее адекватность не вызывает сомнений (когда решаются задачи параметрической идентификации).

Активный эксперимент предполагает особую программу проведения наблюдений таких, что позволяют по результатам исследований дополнительно оценить структуру модели.

Активный эксперимент

Факторами активного эксперимента называют переменные, по которым возможно проводить управление и которые участвуют в построении модели (X_i).

Каждый из факторов может принимать различные значения, которые называются уровнями. На практике, количество уровней – это бесконечное количество или непрерывный ряд уровней $X_i \in [a_i, b_i]$. В теории активного эксперимента этот ряд дискретизируется, и выбираются

отдельные уровни: $\begin{bmatrix} X_{i_1} & X_{i_2} & \mathbf{K} & X_{i_p} \end{bmatrix}$.

Нижний уровень: $X_i^{(\min)} = a_i$

Верхний уровень: $X_i^{(\max)} = b_i$

Нулевой уровень (центр плана): $X_i^{(0)} = \frac{a_i + b_i}{2}$

Интервал варьирования: $\Delta X_i = X_i^{(0)} - X_i^{(\min)} = X_i^{(\max)} - X_i^{(0)}$

Кодированные значения: $x_i = \frac{X_i - X_i^{(0)}}{\Delta X_i}$

Нижний уровень: $x_i^{(\min)} = -1$

Верхний уровень: $x_i^{(\max)} = +1$

Нулевой уровень: $x_i^{(0)} = 0$

Фиксированный набор уровней называется состоянием факторов.

Проверка воспроизводимости эксперимента

Под воспроизводимыми экспериментами понимаются такие, в процессе которых в любой момент времени объект исследования и измерительное оборудование можно вернуть в исходное состояние и эксперимент повторить.

Для проверки воспроизводимости эксперимента проводят несколько серий параллельных опытов. Параллельные опыты – опыты, проведенные несколько раз при одних и тех же значениях факторов.

Для каждой серии параллельных опытов находим среднее:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{ji}, j = \overline{1, N}$$

и оценку дисперсии:

$$S_j^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y_{ji} - \bar{y}_j)^2, j = \overline{1, N},$$

где k – число параллельных опытов, N – число серий параллельных опытов.

Определяем расчетное значение числа Кохрана (критерий проверки воспроизводимости эксперимента):

$$G = \frac{\max_{1 \leq j \leq N} (S_j^2)}{\sum_{j=1}^N S_j^2},$$

По таблице Кохрана определяем $G_a(N, k)$ для заданного N , числа степеней свободы $v = k - 1$, с выбранной доверительной вероятностью α . Квантили распределения $G_a(N, k)$ можно найти также, используя таблицы Фишера:

$$G_a(N, k) = \frac{F_{\frac{N-1+\alpha}{N}}(k-1, (k-1)(N-1))}{N-1 + F_{\frac{N-1+\alpha}{N}}(k-1, (k-1)(N-1))},$$

Проверяем, если $G \leq G_a(N, k)$, то опыты считаются воспроизводимыми, а ряд дисперсий – однородным. Если опыты невоспроизводимы, то можно попытаться достигнуть воспроизводимости выявлением и устранением источников нестабильности эксперимента, а также использованием более точных методов и средств измерений. Наконец, если никакими способами невозможно достигнуть воспроизводимости, то математические методы планирования к такому эксперименту применять нельзя.

Планы

Точка плана – упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Каждой точке плана соответствует вектор значений факторов. Общая совокупность таких векторов образует план эксперимента, а совокупность различных векторов – спектр плана.

План – это программа проведения эксперимента, позволяющая использовать все факторы на всех уровнях. Если план содержит всевозможные сочетания факторов и уровней, то такой план называют полным.

Если p_i – количество уровней i фактора, n – количество факторов, то полный план эксперимента будет включать в себя следующее количество экспериментов:

$$N = \prod_{i=1}^n p_i.$$

Если $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ – общее количество уровней, то полный план эксперимента будет включать в себя следующее количество экспериментов:

$$N = p^n.$$

Пример: $n = 3$, $p = 4$, то $N = 4^3 = 64$ эксперимента.

Полный план позволяет построить адекватную модель, но требует большого количества экспериментов. Поэтому на практике применяют усеченные планы, так называемые дробные планы, которые имеют количество экспериментов меньше, чем полный план, но с достаточной долей точности могут определить адекватность модели.

Любая модель определяется по формуле:

$$A = Y \cdot X^T [X \cdot X^T]^{-1},$$

где $M = X \cdot X^T$ – называется информационной матрицей, $C = M^{-1} = [X \cdot X^T]^{-1}$ – ковариационной матрицей.

Свойства планов:

1) Ортогональность:

$$\sum_{k=1}^N x_{ik} x_{jk} = 0, i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$$

2) Симметричность:

$$\sum_{k=1}^N x_{ik} = 0, i = \overline{1, n}$$

3) Нормировка:

$$\sum_{k=1}^N (x_{ik})^2 = N, i = \overline{1, n}$$

Задача планирования эксперимента: необходимо найти такой план, который бы соответствовал экстремальному значению выбранного показателя эффективности планирования (критерия оптимальности плана).

Принято подразделять критерии оптимальности на две группы:

- критерии, связанные с точностью оценивания коэффициентов регрессии: критерии D-, A-, E-оптимальности и ортогональности;
- критерии, связанные с предсказательными свойствами эмпирического уравнения регрессии: критерии G-, I-, Q-оптимальности, ротатабельности и равномерности планирования.

1. Если ковариационная матрица ставится по принципу минимизации определителя, то выбранный план эксперимента будет называться D-планом.

$$\min_i \det C_i$$

Минимизация определителя ковариационной матрицы соответствует максимизации определителя информационной матрицы

$$\max_i \det M_i$$

2. Если минимизируется след матрицы, то такой план называется A-планом.

$$\min_i \text{tr} C_i$$

Минимизация следа матрицы соответствует минимизации средней дисперсии оценок параметров.

3. Условием задания E-плана является выбор плана таким, чтобы максимальное собственное число матрицы M было минимальным.

$$\min_i \max l(M_i)$$

4. План называется ортогональным, если соответствующая ему ковариационная матрица C диагональна.

5. В случае G-плана минимизируется величина максимальной дисперсии предсказанных значений выходной переменной.

6. I-план предполагает минимизацию средневзвешенной дисперсии предсказанных значений выходной переменной с заданной весовой функцией j . Если $j \equiv 1$, то план называется Q-планом.

7. План называется ротатабельным, если дисперсия предсказанных значений выходной переменной постоянна на фиксированном расстоянии от центра эксперимента.

8. План называется униформным, если дисперсия предсказанных значений выходной переменной практически постоянна в некоторой области факторного пространства.

Кроме сформулированных выше критериев оптимальности можно указать также некоторые желательные свойства планов:

– план называют насыщенным, если общее число наблюдений равно числу неизвестных параметров регрессионной модели. По-видимому, желательно, чтобы любой реальный план был в той или иной степени близок к насыщенному. Особенно это важно на этапе предварительного исследования, когда требуется получить пусть приближенное представление об объекте, но зато с минимальными затратами;

– план называется композиционным, если в спектр его в качестве составной части входят точки спектра плана, который был реализован при построении более простой модели. Композиционность плана дает возможность применить точки спектра плана одного из предшествующих этапов исследования в качестве точек части спектра плана следующего этапа, если модель, полученная на предшествующем этапе, не устраивает исследователя и требует усовершенствования. При этом, естественно, в используемых точках спектра плана нет необходимости проводить опыты еще раз, чем достигается известная экономия количества опытов. Композиционность плана есть важное условие эффективности практической реализации принципа постепенного усложнения моделей.

Перечень свойств плана может быть, конечно, расширен. Желательны, например, простота вычислений коэффициентов моделей, возможность разбиения плана на отдельные блоки, если существует опасность наличия временного дрейфа и его нужно исключить, симметрия в расположении точек плана и минимальное число уровней варьирования по каждому из факторов.

На практике чаще строятся D-планы.

Отсеивающие эксперименты

При числе факторов $n \geq 7$ возникает необходимость в их сокращении, т.е. отсеивании из-за необходимости выполнения большого числа опытов. Для этой цели разработаны различные методы, например:

Априорное ранжирование факторов (психологический эксперимент)

На стадии предварительного изучения объекта исследования при формализации априорных сведений иногда полезно проведение психологического эксперимента, заключающегося в объективной обработке данных, полученных в результате опроса специалистов или из исследований, опубликованных в литературе. Такой эксперимент позволяет более правильно спроектировать объект исследования, принять или отвергнуть некоторые предварительные гипотезы, дать сравнительную оценку влияния различных факторов на параметры оптимизации и тем самым правильно отобрать факторы для последующего активного эксперимента, обоснованно исключив некоторые из них из дальнейшего рассмотрения.

Метод случайного баланса

Основан на том, что если все эффекты, ответственные за объект исследования, расположить в порядке убывания вносимого им вклада в дисперсию параметра оптимизации, то получится ранжированный ряд с убыванием экспоненциального типа. При приближенном воспроизведении с помощью небольшого числа опытов этого ранжированного ряда обычно можно выделить незначимые эффекты, которые относятся к шумовому полю, и несколько существенных эффектов, которые отсеивают, а затем учитывают в дальнейшей работе.

Неполноблочные планы (учет качественных факторов и экспертные оценки)

На практике часто возникает необходимость в отсеивающем эксперименте в условиях, когда все или некоторые из рассматриваемых факторов являются качественными. В таком случае целесообразно применять неполноблочные планы (блок-схемы). Аналогичные планы используют и при проведении эксперимента в условиях неоднородностей (различие в партиях сырья, исполнителях, машинах, приборах и т.д.), т.е. при отсутствии возможности реализовать все вероятные варианты. Блок-схемы позволяют оценить влияние неоднородностей и снизить ошибку эксперимента, росту которой эти неоднородности способствуют. Наконец, блок-схемы полезны при экспертных оценках (проверка значимости различий сортов и т.п.).

Блоками называются различные источники неоднородностей. В задаче, например, нужно учесть пять блоков, если имеются пять различных партий сырья. Блоки могут содержать разное число элементов, т.е. иметь различные размеры, особенности и т.п. Так, если для каждой из пяти партий сырья применять четыре различных способа переработки, то блоки содержат по четыре элемента.

План называется полноблочным, если в процессе эксперимента в каждом блоке изучают все элементы. Примером полноблочного плана является полный факторный эксперимент. Когда в блоках изучают лишь некоторые их элементы, имеют дело с неполноблочным планом, который экономичнее.

Планы первого порядка

Планы первого порядка предназначены для экспериментального получения линейных регрессионных моделей. Для построения линейных регрессионных моделей достаточно двух уровней каждого фактора. Известно несколько разновидностей планов первого порядка:

1) однофакторный (классический) эксперимент – предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов, в то время как все остальные факторы стабилизированы на некотором уровне.

	x_1	x_2	$\dots$	x_n
1	-1	0	$\dots$	0
2	+1	0	$\dots$	0
3	0	-1	$\dots$	0
4	0	+1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$N-1$	0	0	$\dots$	-1
$N=2n$	0	0	$\dots$	+1

Информационная матрица:

$$M = \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 2 \end{bmatrix}$$

Свойства плана: ортогональный, симметричный, ротатабельный.

Что касается его свойств с точки зрения прочих критериев оптимальности, связанных с точностными характеристиками регрессионной модели, то однофакторный эксперимент неудовлетворителен. Поэтому он не находит в настоящее время широкого применения.

2) полный факторный эксперимент (ПФЭ),

$$N = 2^n$$

Пример: $p = 2$, $n = 3$, $x_i = \begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}$

Полный план будет иметь вид:

$$N = 2^3 = 8$$

	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	+1
3	-1	+1	-1
4	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1

Свойства плана:

- ортогональный, симметричный, нормальный,
- ротатабельный, А-оптимальный, Е-оптимальный для линейной модели

$$y_m = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

- D-оптимальный, G-оптимальный для полной (насыщенной) модели

$$y_m = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \dots + \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^n a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} + \dots + a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n,$$

информационная матрица:

$$M = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & N & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & N & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & N \end{bmatrix},$$

число экспериментов: $N = 1 + n + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n$, следовательно по отношению к данной модели план является насыщенным.

3) дробный факторный эксперимент (ДФЭ)

Пример: $p = 2$, $n = 3$, $x_i = \begin{matrix} -1 \\ +1 \end{matrix}$

Построим дробный план:

откидываем любую переменную (x_3) и план уменьшается на 4 единицы. Для оставшихся двух переменных строится полный план, а x_3 считается равной $x_3 = x_1 \cdot x_2$.

$$N = 2^{3-1} = 4$$

	x_1	x_2	x_3
1	-1	-1	+1
2	-1	+1	-1
3	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1

переменная x_3 называется генератором дробного плана

Для двухуровневой системы количество экспериментов равно 2^{n-m} ($m < n$), где m - количество генераторов дробного плана, которые составляются как результаты поэлементного умножения основных факторов ($n - m$), при этом количество множителей составляет от 2 до $m - 1$.

Пример: $n = 6$, $m = 4$,

$$2^{6-4} = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 = x_1 \cdot x_2, x_4 = x_1 \cdot x_3, x_5 = x_2 \cdot x_3, x_6 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

	x_1	x_2	$x_3 = x_1 \cdot x_2$	$x_4 = x_1 \cdot x_3$	$x_5 = x_2 \cdot x_3$	$x_6 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
1	-1	-1	+1	-1	-1	+1
2	-1	+1	-1	+1	-1	+1
3	+1	-1	-1	-1	+1	+1
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Свойства плана:

- ортогональный, нормальный,
 - ротатабельный, А-оптимальный, Е-оптимальный для линейной модели,
 - D-оптимальный, G-оптимальный для соответствующей полной (насыщенной) модели,
- информационная матрица:

$$M = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & N & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & N & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & N \end{bmatrix},$$

4) насыщенный план (симплекс-план).

Алгоритм обработки экспериментальных данных
(для линейной регрессии)

1. Проверка воспроизводимости эксперимента.
2. Оценка дисперсии шума.

$$S_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j^2,$$

число степеней свободы, связанное с этой оценкой: $\nu_e = N(k - 1)$,
 k – число измерений.

3. Вычисление оценок коэффициентов регрессии.

$$A = Y^T X^T [X X^T]^{-1}$$

Для однофакторного эксперимента:

$$a_0 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} \overline{y_j}$$

$$a_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} x_{ij} \overline{y_j}, i = \overline{1, n}$$

Для ПФЭ 2^n :

$$a_0 = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \overline{y_j}$$
$$a_i = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} x_{ij} \overline{y_j}, i = \overline{1, n}$$

Для ДФЭ 2^{n-m} :

$$a_0 = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{j=1}^{2^{n-m}} \overline{y_j}$$
$$a_i = \frac{1}{2^{n-m}} \sum_{j=1}^{2^{n-m}} x_{ij} \overline{y_j}, i = \overline{1, n}$$

4. Определение дисперсий оценок коэффициентов регрессии.

Для однофакторного эксперимента:

$$S_{a_0}^2 = \frac{S_e^2}{2nk}, S_{a_i}^2 = \frac{S_e^2}{2k}, i = \overline{1, n},$$

число степеней свободы: $v_{a_0} = v_{a_i} = N(k-1), i = \overline{1, n}$.

Для ПФЭ 2^n :

$$S_{a_i}^2 = \frac{S_e^2}{2^n k}, i = \overline{0, 2^n - 1},$$

число степеней свободы: $v_{a_i} = N(k-1), i = \overline{0, 2^n - 1}$.

Для ДФЭ 2^{n-m} :

$$S_{a_i}^2 = \frac{S_e^2}{2^{n-m} k}, i = \overline{0, 2^{n-m} - 1},$$

число степеней свободы: $v_{a_i} = N(k-1), i = \overline{0, 2^{n-m} - 1}$.

5. Проверка значимости коэффициентов регрессии.

Вычисление статистики

$$t_j = \frac{a_j}{S_{a_j}}$$

и сравнение с табличным критическим значением распределения Стьюдента $t\left(v_e, \frac{q}{2}\right)$

с уровнем значимости q , например, $q = 0,05$.

Если $|t_j| \leq t\left(v_e, \frac{q}{2}\right)$, то коэффициент считается незначимым: выбрасывается из регрессионной модели, $b_j = 0$.

Если $|t_j| > t\left(v_e, \frac{q}{2}\right)$, то коэффициент считается значимым: данный коэффициент значимо (неслучайно) отличается от 0 и его следует сохранить в регрессионной модели, $b_j = 1$.

С физической точки зрения может существовать несколько причин, по которым коэффициент регрессии при определенной переменной оказывается незначимым:

- переменная действительно не влияет на выходную переменную;
- действие переменной не проявилось на фоне помехи, т. е. мало отношение сигнал/шум.

Следовательно, если бы более правильно был выбран соответствующий интервал варьирования или же проведено большее число параллельных опытов, вполне вероятно, что данный коэффициент регрессии стал бы значимым;

– центр плана расположен вблизи особой точки (например, вблизи экстремума) частной зависимости выходной переменной от данной переменной.

Конечным результатом после проверки значимости всех коэффициентов регрессии, входящих в искомую модель, является уравнение регрессии, содержащее лишь переменные со значимыми коэффициентами:

$$\hat{y}_M = b_0 a_0 + \sum_{i=1}^n b_i a_i x_i$$

$$\text{Количество значимых коэффициентов } \hat{N} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i$$

6. Расчет предсказанных значений выходной переменной и анализ точности предсказания.

Для всех значений факторов плана $x_1, x_2, \dots, x_N$ расчет значений $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N$.

Если $\hat{N} = N$, то $\hat{y}_j = \bar{y}_j, j = \overline{1, N}$

Если $\hat{N} < N$, то $\hat{y}_j \neq \bar{y}_j, j = \overline{1, N}$, выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{N - \hat{N}} \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2$,

число степеней свободы $\nu = N - \hat{N}$

7. Проверка адекватности модели.

Вычисление статистики

$$F = \frac{kS^2}{S_e^2}$$

и сравнение с табличным критическим значением распределения Фишера $F(\nu, \nu_e, q)$ с уровнем значимости q , например, $q = 0,05$.

Если $F < F(\nu, \nu_e, q)$, то модель считается адекватной.

Если $F \geq F(\nu, \nu_e, q)$, то модель считается неадекватной.

8. Проверка работоспособности адекватной модели.

Расчет коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{k(N - \hat{N})S^2 + N(k - 1)S_e^2}{k \sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + N(k - 1)S_e^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j$$

Модель считается работоспособной, если $R^2 \geq 0,75$, что обеспечивает уменьшение ошибки предсказания, по крайней мере, в 2 раза, когда для предсказания используется регрессионная модель вместо примитивного предсказания по среднему значению отклика $\bar{y}$

Полезная литература

Бояршинова А. К., Фишер А. С. Теория инженерного эксперимента: текст лекций. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2006. – 85 с.

Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. – Минск: Издательство БГУ, 1982. – 302 с.

Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 681 с.

Дилигенская А. Н. Идентификация объектов управления. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2009. – 136 с.