<u>Временные ряды</u>

Линейный случайный процесс

Первая форма записи:

$$x_n = m + u_n + b_1 u_{n-1} + b_2 u_{n-2} + \ldots = m + u_n + \sum_1^{\infty} b_i u_{n-i} ,$$

m – математическое ожидание.

Вторая форма записи:

$$x_n = m + u_n + a_1 \left(x_{n-1} - m\right) + a_2 \left(x_{n-2} - m\right) + \ldots = m + u_n + \sum_1^{\infty} a_i \left(x_{n-i} - m\right).$$

Оператор сдвига назад:

$Bx_n = x_{n-1}$,

$B^j x_n = x_{n-j}$.

Первая форма записи:

$$x_n = m + \left(1 + \sum_1^{\infty} b_i B^i\right) u_n = m + b\left(B\right) u_n ,$$

$$b\left(B\right) = 1 + \sum_1^{\infty} b_i B^i = \sum_0^{\infty} b_i B^i ,$$

$$b_0 = 1.$$

Вторая форма записи:

$$u_n = x_n - m - \sum_1^{\infty} a_i \left(x_{n-i} - m\right) = \left(1 - \sum_1^{\infty} a_i B^i\right)\left(x_n - m\right) = a\left(B\right)\left(x_n - m\right),$$

$$a\left(B\right) = 1 - \sum_1^{\infty} a_i B^i .$$

Итого:

$$\begin{cases} u_n = a\left(B\right)\left(x_n - m\right) \\ x_n = m + b\left(B\right) u_n \end{cases} \Rightarrow b\left(B\right) \cdot a\left(B\right) = 1.$$

Условие стационарности случайного процесса:

$b\left(B\right)$ сходится при $\left|B\right| \le 1$.

Условие обратимости случайного процесса:
$a(B)$ сходится при $|B| \le 1$.

Автоковариация:
$$g_k = \operatorname{cov}[x_n x_{n+k}] = M[(x_n - m)(x_{n+k} - m)]$$

Автокорреляция:
$$r_k = \frac{M[(x_n - m)(x_{n+k} - m)]}{\sqrt{M[(x_n - m)^2] \cdot M[(x_{n+k} - m)^2]}}$$

Спектральная плотность:
$$p(s) = 2\left(g_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(2pks)\right),$$
$$0 \le s \le \frac{1}{2}.$$

Дисперсия:
$$s_x^2 = g_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} p(s)ds.$$

Нормированная спектральная плотность:
$$g(s) = \frac{p(s)}{g_0} = 2\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(2pks)\right),$$
$$0 \le s \le \frac{1}{2}.$$

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Процесс авторегрессии порядка p, АР(р):
$$x_n = m + u_n + \sum_1^p a_i(x_{n-i} - m).$$

Процесс скользящего среднего порядка q, СС(q):
$$x_n = m + u_n + \sum_1^q b_i u_{n-i}.$$

Процесс авторегрессии – скользящего среднего, АРСС(p,q):

$$x_n = m + u_n + \sum_1^p a_i\left(x_{n-i} - m\right) + \sum_1^q b_i u_{n-i}\,.$$

	АР(p)	СС(q)
Уравнение процесса	$x_n = m + u_n + \sum\limits_1^p a_i\left(x_{n-i} - m\right)$	$x_n = m + u_n + \sum\limits_1^q b_i u_{n-i}$
Характеристическое уравнение	$a(t) = 1 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_p t^p = 0$	$b(t) = 1 - b_1 t - b_2 t^2 - \ldots - b_p t^p = 0$
Стационарность	$a(t) = 0, \lvert t\rvert > 1$	Нет ограничений
Обратимость	Нет ограничений	$b(t) = 0, \lvert t\rvert > 1$
Для 1-го порядка	$-1 < a_1 < 1$	$-1 < b_1 < 1$
Для 2-го порядка	$\begin{cases} a_2 + a_1 < 1 \\ a_2 - a_1 < 1 \\ -1 < a_2 < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} b_2 + b_1 < 1 \\ b_2 - b_1 < 1 \\ -1 < b_2 < 1 \end{cases}$
Автоковариация	$g_k = \sum\limits_1^p a_i g_{k-i}, k > 0$	$g_k = \begin{cases} \left(-b_k + \sum\limits_{i=1}^{q-k} b_i b_{k+i}\right) s_u^2, 0 < k \le q \\ 0, k > q \end{cases}$
Автокорреляция	$r_k = \sum\limits_1^p a_i r_{k-i}, k > 0$	$r_k = \begin{cases} \dfrac{-b_k + \sum\limits_{i=1}^{q-k} b_i b_{k+i}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{q} b_i^2}, 0 < k \le q \\ 0, k > q \end{cases}$
Спектральная плотность	$p(s) = \dfrac{2s_u^2}{\left\lvert 1 - \sum\limits_{j=1}^{p} a_j \exp(-i2pjs)\right\rvert^2}$, $0 \le s \le \dfrac{1}{2}$	$p(s) = 2s_u^2 \left\lvert 1 - \sum\limits_{j=1}^{q} b_j \exp(-i2pjs)\right\rvert^2$, $0 \le s \le \dfrac{1}{2}$
Дисперсия		$s_x^2 = g_0 = \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{q} b_i^2\right) s_u^2$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. – М.: Мир, 1974. – 406 с.