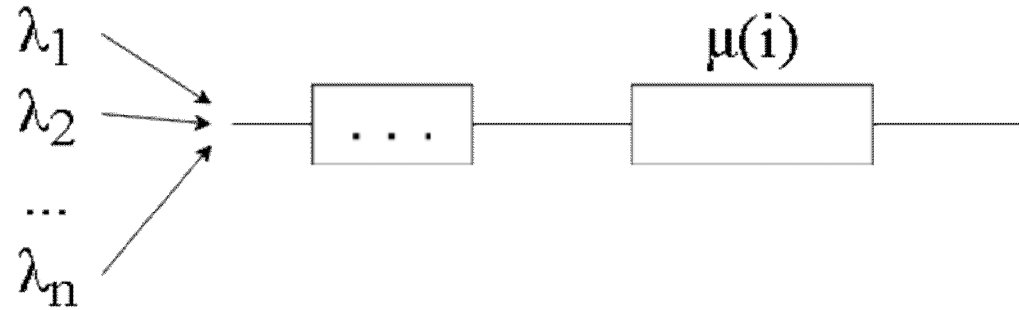


Системы массового обслуживания с неоднородным потоком

Модель



$$l_i \rightarrow m_i$$

- Длительность обслуживания: x_i
- Математическое ожидание (первый момент): $M[x_i] = \overline{x_i}$
- Второй момент: $M[x_i^2] = v_i$

Модель

- M (экспоненциальное распределение):

$$\overline{x_i} = \frac{1}{m_i}, n_i = \frac{2}{m_i^2}$$

- D (детерминированное распределение):

$$\overline{x_i} = \frac{1}{m_i}, n_i = \frac{1}{m_i^2}$$

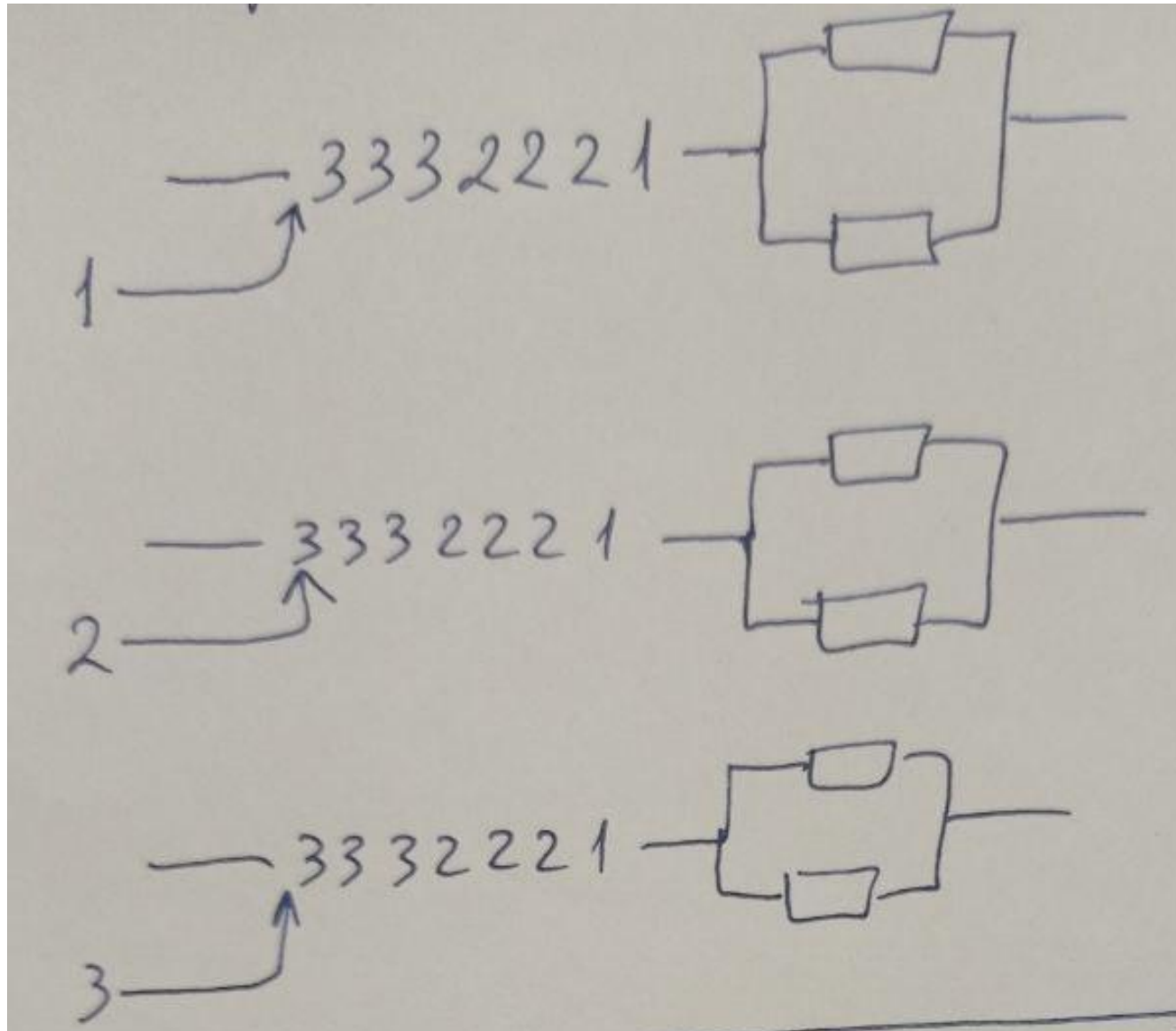
- E_{k_i} (распределение Эрланга):

$$\overline{x_i} = \frac{1}{m_i}, n_i = \left(1 + \frac{1}{k_i}\right) \frac{1}{m_i^2}$$

Приоритеты

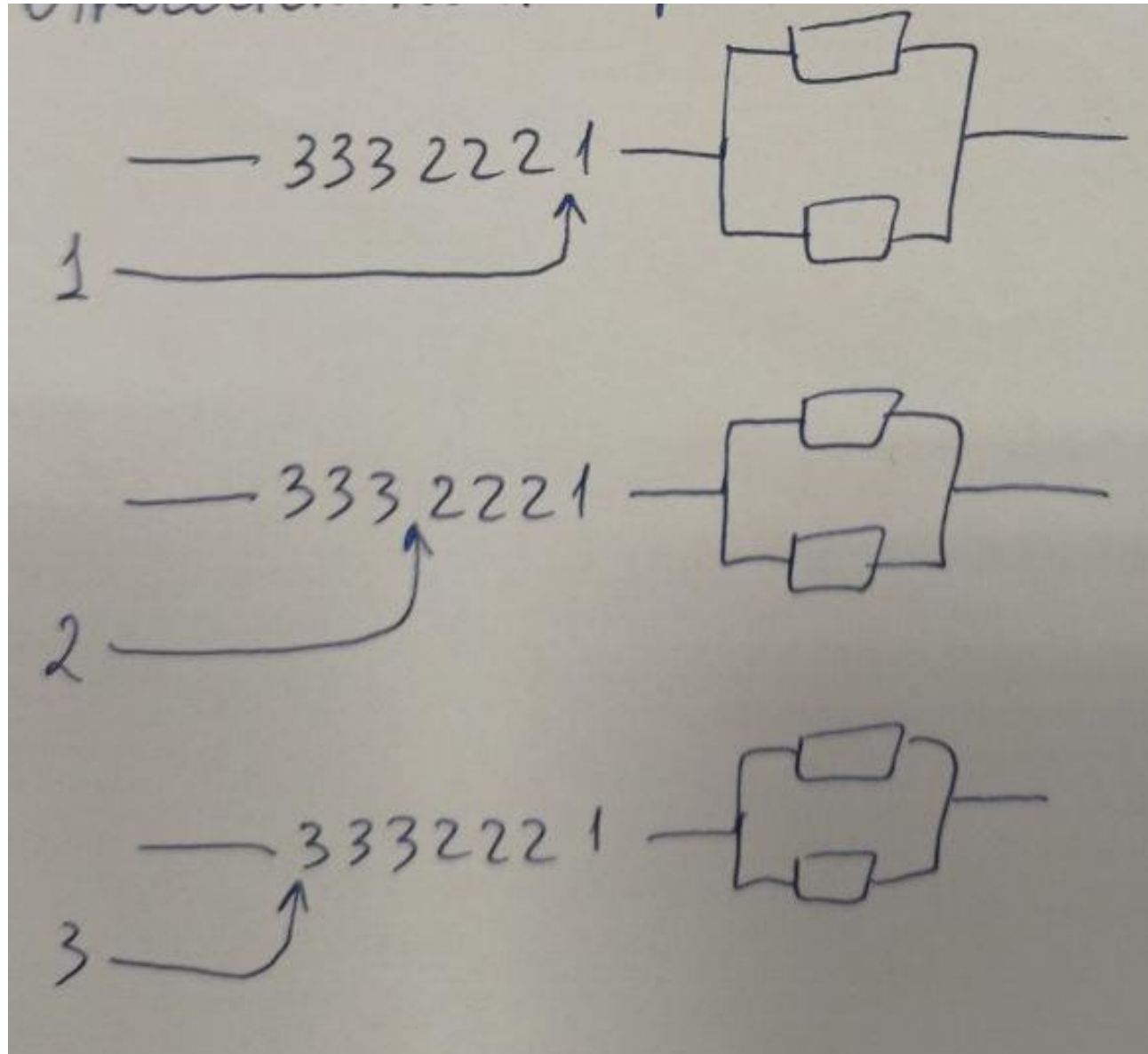
- Беспriorитетное обслуживание
 - в конец очереди
- Обслуживание с относительным приоритетом
 - опережая в очереди менее приоритетные заявки
- Обслуживание с абсолютным приоритетом
 - сразу на обслуживание, прерывая обслуживание менее приоритетных заявок

Бесприоритетное обслуживание



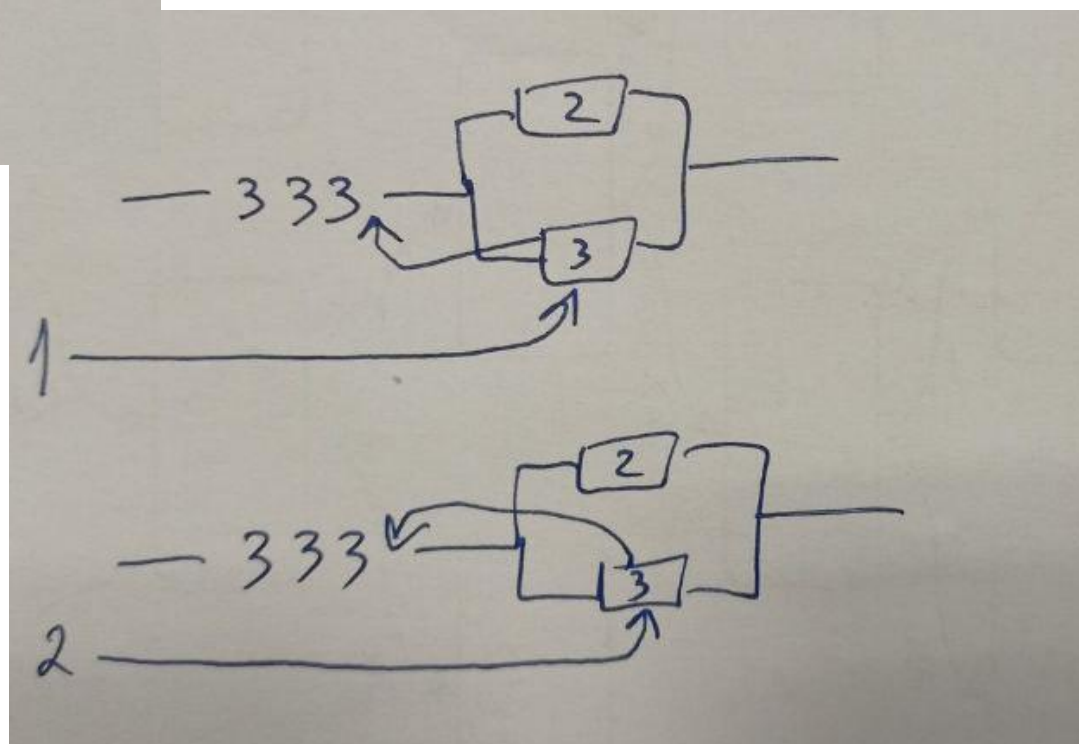
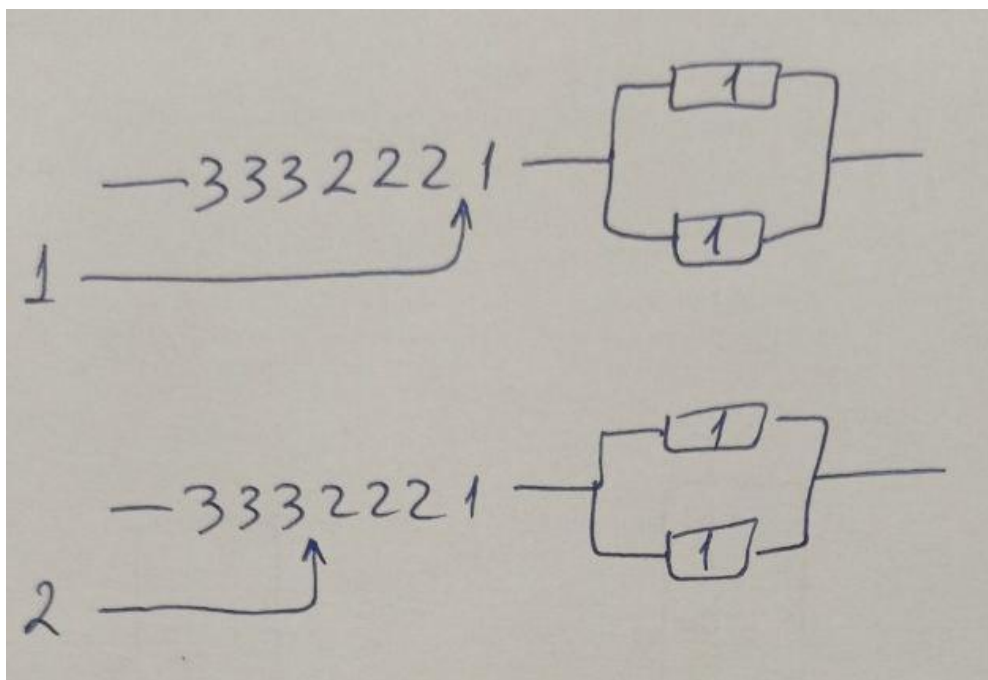
Относительный приоритет

3-->1



Абсолютный приоритет

3-->1



Абсолютный приоритет

Моделирование:

- С повторным обслуживанием и повторным определением времени обслуживания
 - при каждой новой попытке обслуживания СВ «время обслуживания» генерируется заново
- С повторным обслуживанием без повторного определения времени обслуживания
 - СВ «время обслуживания» генерируется один раз, при каждой новой попытке обслуживания используется то же значение
- С дообслуживанием
 - при попадании на прибор обслуживание начинается с того момента, когда оно было прервано

Задача

- M/M/1

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1}$$

$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$

Бесприоритетное обслуживание

$$q_i = \frac{l_i n_i}{2} \quad T_k = \sum_1^k q_i \quad T = T_n$$

$$r_i = \overline{x_i} l_i \quad R_k = \sum_1^k r_i \quad R = R_n \quad \overline{t_o} = \frac{T}{1-R}$$

• M/M/1

$$\overline{x_i} = \frac{1}{m_i}, n_i = \frac{2}{m_i^2} \quad T_n = \sum_1^n \frac{r_i}{m_i}$$

$$r_i = \frac{l_i}{m_i} \quad q_i = \frac{l_i n_i}{2} = \frac{l_i 2}{2 m_i^2} = \frac{r_i}{m_i}$$

$$\overline{t_o} = \frac{\sum_1^n \frac{r_i}{m_i}}{1 - \sum_1^n r_i}$$

Бесприоритетное обслуживание

- M/M/1

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1} \quad r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$
$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$T = \frac{0,5}{1} + \frac{0,1}{2} = 0,55 \quad R = 0,5 + 0,1 = 0,6$$

$$\overline{t_o} = \frac{T}{1-R} = \frac{0,55}{1-0,6} = 1,375c$$

Относительный приоритет

$n \rightarrow 1$

$$R_0 = 0$$

$$\overline{t_{o_i}} = \frac{T}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}$$

Относительный приоритет

- M/M/1, приоритет у первого 2-->1

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1} \quad r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$
$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$\overline{t_{o_1}} = \frac{T}{(1 - r_1)} = \frac{0,55}{(1 - 0,5)} = 1,1c$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{T}{(1 - r_1)(1 - R)} = \frac{0,55}{(1 - 0,5)(1 - 0,6)} = 2,75 c$$

Относительный приоритет

- M/M/1, приоритет у второго 1-->2

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1} \quad r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$
$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{T}{(1 - r_2)} = \frac{0,55}{(1 - 0,1)} = 0,611c$$

$$\overline{t_{o_1}} = \frac{T}{(1 - r_2)(1 - R)} = \frac{0,55}{(1 - 0,1)(1 - 0,6)} = 1,528 c$$

Абсолютный приоритет с дообслуживанием

$n \rightarrow 1$

$$\overline{t_{o_i}} = \frac{R_{i-1} \overline{x_i}}{(1 - R_{i-1})} + \frac{T_i}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}$$

- M/M/1

$$\overline{t_{o_i}} = \frac{R_{i-1}}{m_i (1 - R_{i-1})} + \frac{T_i}{(1 - R_{i-1})(1 - R_i)}$$

Абсолютный приоритет

- M/M/1, приоритет у первого 2-->1

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1}$$

$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$

$$\overline{t_{o_1}} = \frac{q_1}{(1 - r_1)} = \frac{r_1}{m_1(1 - r_1)} = \frac{0,5}{1(1 - 0,5)} = 1c$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{r_1}{m_2(1 - r_1)} + \frac{T}{(1 - r_1)(1 - R)} =$$

$$= \frac{0,5}{2(1 - 0,5)} + \frac{0,55}{(1 - 0,5)(1 - 0,6)} = 3,25c$$

Абсолютный приоритет

- M/M/1, приоритет у второго 1-->2

$$l_1 = 0,5c^{-1}, m_1 = 1c^{-1}$$

$$l_2 = 0,2c^{-1}, m_2 = 2c^{-1}$$

$$r_1 = 0,5c^{-1}, r_2 = 0,1c^{-1}$$

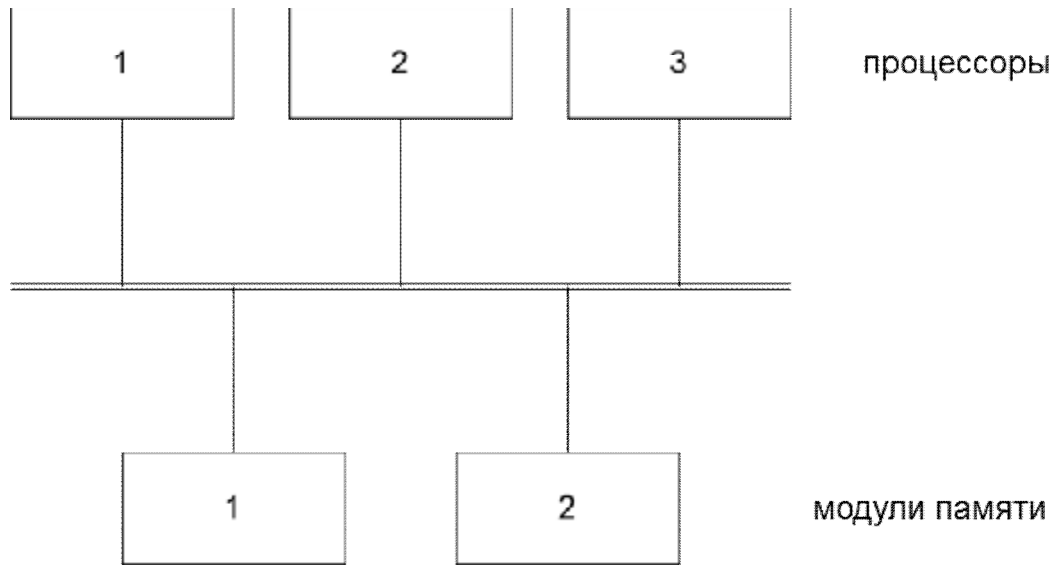
$$\overline{t_{o_2}} = \frac{q_2}{(1 - r_2)} = \frac{r_2}{m_2(1 - r_2)} = \frac{0,1}{2(1 - 0,1)} = 0,056c$$

$$\begin{aligned}\overline{t_{o_1}} &= \frac{r_2}{m_1(1 - r_2)} + \frac{T}{(1 - r_2)(1 - R)} = \\ &= \frac{0,1}{1(1 - 0,1)} + \frac{0,55}{(1 - 0,1)(1 - 0,6)} = 1,639c\end{aligned}$$

Результаты

	$\overline{t_{o_1}}$	$\overline{t_{o_2}}$
Бесприоритетное	1,375	1,375
Относительный приоритет у первого	1,1	2,75
Относительный приоритет у второго	1,528	0,611
Абсолютный приоритет у первого	1	3,25
Абсолютный приоритет у второго	1,639	0,056

Задача о ВС с общей шиной



На каждом процессоре
выполняется своя
программа

Работа процессора:

- Фаза счёта
- Фаза обмена
с памятью

Когда один процессор обменивается с памятью,
никакой другой процессор не может обмениваться
с памятью

Следовательно, общая шина – канал обслуживания

Задача о ВС с общей шиной

- Фаза счёта: $\overline{t_i} = \frac{1}{l_i}$
- Фаза обмена с памятью: $\overline{t_i} = \frac{1}{m_i}$

Состояние:

(z_1, z_2, z_3) - номера программ с учётом
порядка их выполнения

z_1 - обслуживается

z_2, z_3 - в очереди

Задача о ВС с общей шиной

Состояние:

$$(z_1, z_2, z_3)$$

Примеры

- состояние (000):
 - процессор 1 в фазе счёта
 - процессор 2 в фазе счёта
 - процессор 3 в фазе счёта
- состояние (300):
 - процессор 3 в фазе обмена с памятью, идёт обмен
 - процессор 1 в фазе счёта
 - процессор 2 в фазе счёта

Задача о ВС с общей шиной

Состояние:

$$(z_1, z_2, z_3)$$

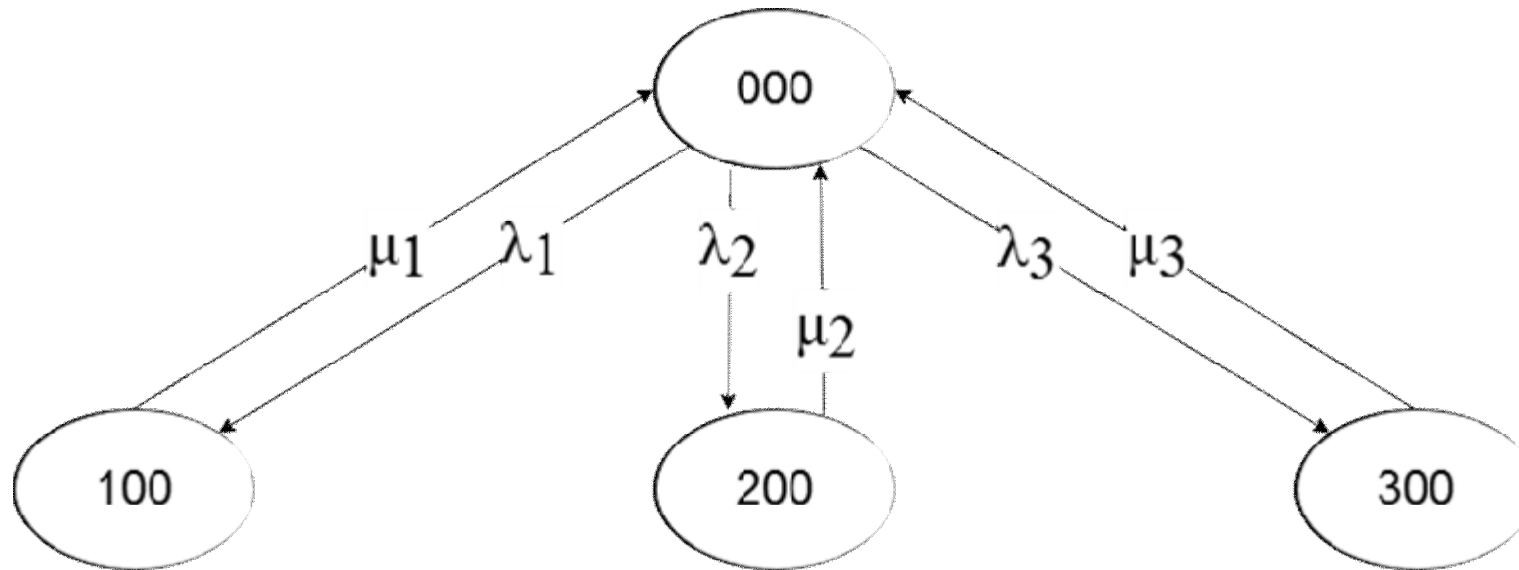
Примеры

- состояние (123):
процессор 1 в фазе обмена с памятью, идёт обмен
процессор 2 в фазе обмена с памятью, ожидает
процессор 3 в фазе обмена с памятью, ожидает
- состояние (210):
процессор 2 в фазе обмена с памятью, идёт обмен
процессор 1 в фазе обмена с памятью, ожидает
процессор 3 в фазе счёта

Задача о ВС с общей шиной

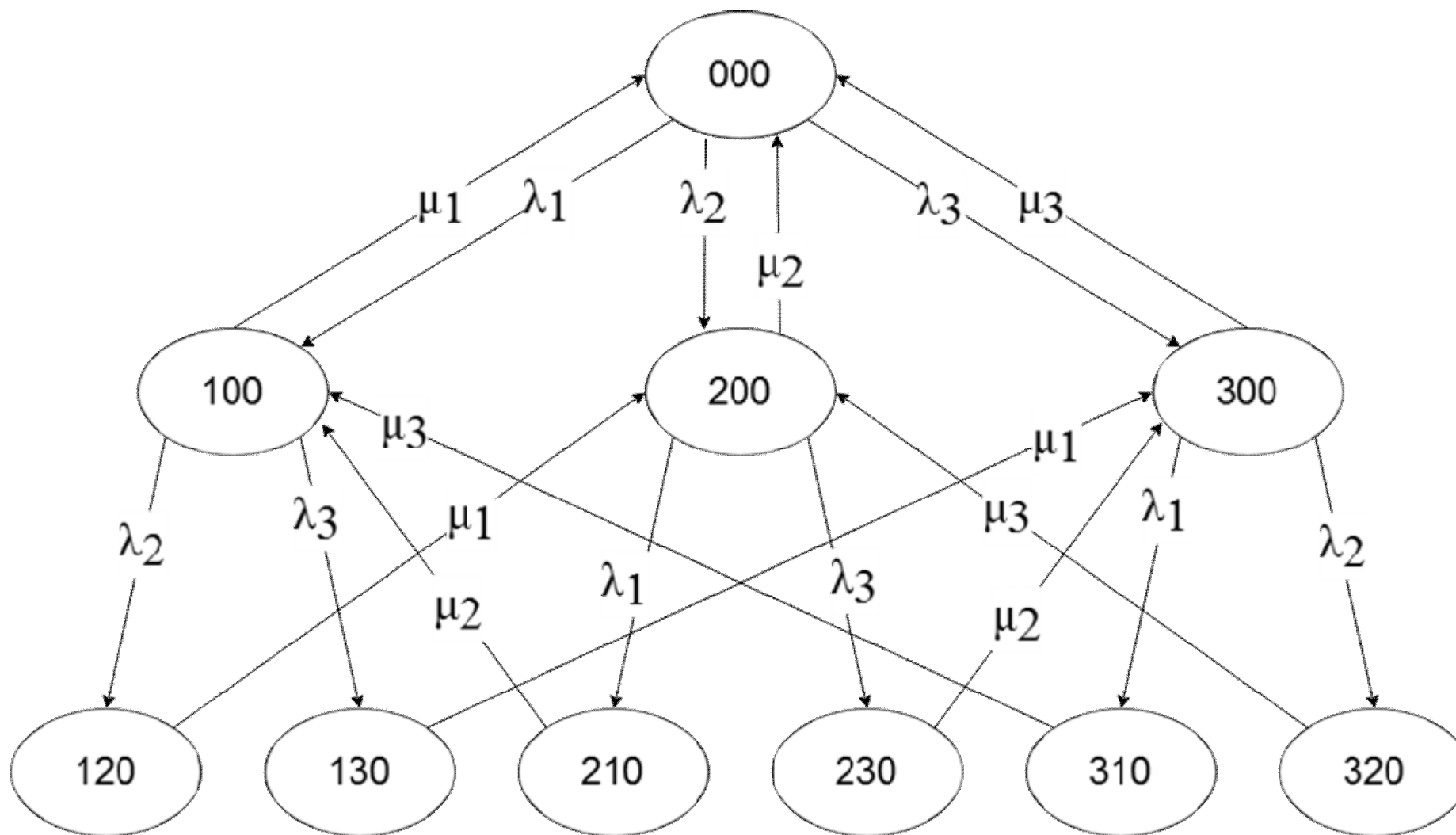
1. Беспriorитетное обслуживание

Начальное состояние: 000 – все процессоры в фазе счёта, любой из них может перейти к фазе обмена



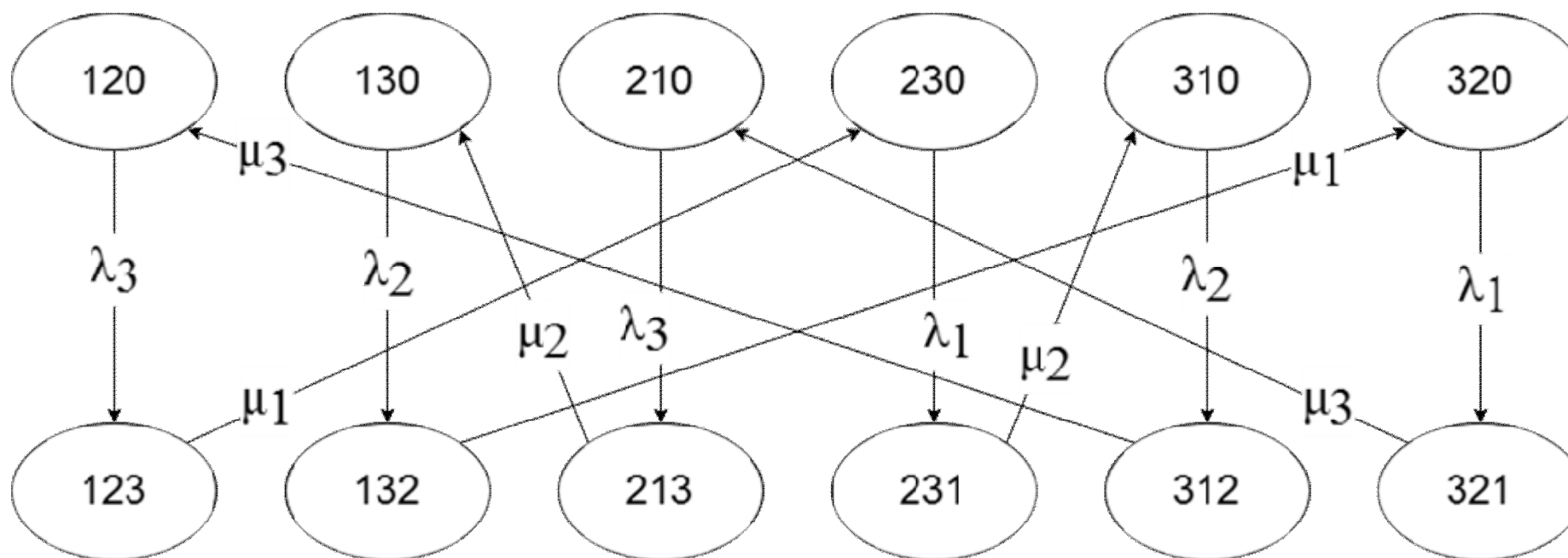
Задача о ВС с общей шиной

1. Беспriorитетное обслуживание



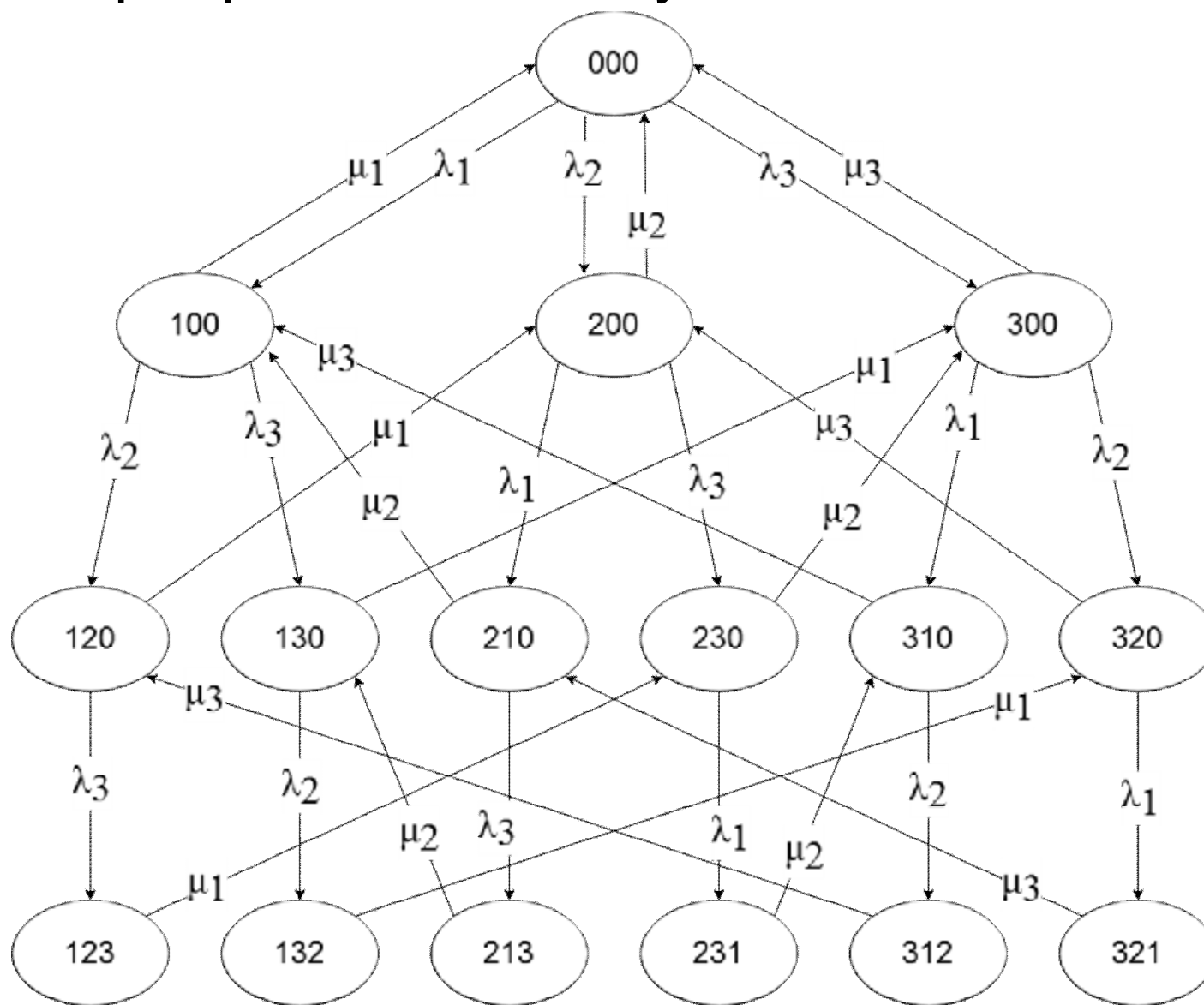
Задача о ВС с общей шиной

1. Беспriorитетное обслуживание



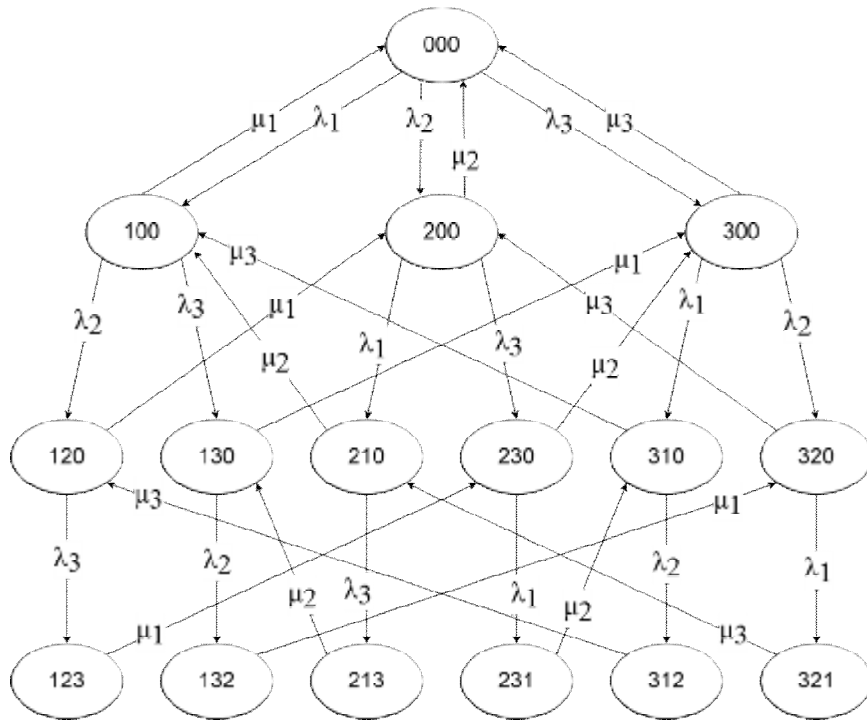
Задача о ВС с общей шиной

1. Беспriorитетное обслуживание



Задача о ВС с общей шиной

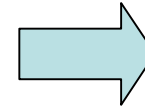
1. Беспriorитетное обслуживание



$$\begin{cases}
 P_{000} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = P_{100} \cdot m_1 + P_{200} \cdot m_2 + P_{300} \cdot m_3 \\
 P_{100} \cdot (m_1 + l_2 + l_3) = P_{000} \cdot l_1 + P_{210} \cdot m_2 + P_{310} \cdot m_3 \\
 P_{200} \cdot (l_1 + m_2 + l_3) = P_{120} \cdot m_1 + P_{000} \cdot l_2 + P_{320} \cdot m_3 \\
 P_{300} \cdot (l_1 + l_2 + m_3) = P_{130} \cdot m_1 + P_{230} \cdot m_2 + P_{000} \cdot l_3 \\
 P_{120} \cdot (m_1 + l_3) = P_{100} \cdot l_2 + P_{312} \cdot m_3 \\
 P_{130} \cdot (m_1 + l_2) = P_{100} \cdot l_3 + P_{213} \cdot m_2 \\
 P_{210} \cdot (m_2 + l_3) = P_{200} \cdot l_1 + P_{321} \cdot m_3 \\
 P_{230} \cdot (m_2 + l_1) = P_{200} \cdot l_3 + P_{123} \cdot m_1 \\
 P_{310} \cdot (m_3 + l_2) = P_{300} \cdot l_1 + P_{231} \cdot m_2 \\
 P_{320} \cdot (m_3 + l_1) = P_{300} \cdot l_2 + P_{132} \cdot m_1 \\
 P_{123} \cdot m_1 = P_{120} \cdot l_3 \\
 P_{132} \cdot m_1 = P_{130} \cdot l_2 \\
 P_{213} \cdot m_2 = P_{210} \cdot l_3 \\
 P_{231} \cdot m_2 = P_{230} \cdot l_1 \\
 P_{312} \cdot m_3 = P_{310} \cdot l_2 \\
 P_{321} \cdot m_3 = P_{320} \cdot l_1 \\
 P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{300} + P_{120} + P_{130} + P_{210} + P_{230} + \\
 P_{310} + P_{320} + P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321} = 1
 \end{cases}$$

Задача о ВС с общей шиной

$$\begin{cases}
 P_{000} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = P_{100} \cdot m_1 + P_{200} \cdot m_2 + P_{300} \cdot m_3 \\
 P_{100} \cdot (m_1 + l_2 + l_3) = P_{000} \cdot l_1 + P_{210} \cdot m_2 + P_{310} \cdot m_3 \\
 P_{200} \cdot (l_1 + m_2 + l_3) = P_{120} \cdot m_1 + P_{000} \cdot l_2 + P_{320} \cdot m_3 \\
 P_{300} \cdot (l_1 + l_2 + m_3) = P_{130} \cdot m_1 + P_{230} \cdot m_2 + P_{000} \cdot l_3 \\
 P_{120} \cdot (m_1 + l_3) = P_{100} \cdot l_2 + P_{312} \cdot m_3 \\
 P_{130} \cdot (m_1 + l_2) = P_{100} \cdot l_3 + P_{213} \cdot m_2 \\
 P_{210} \cdot (m_2 + l_3) = P_{200} \cdot l_1 + P_{321} \cdot m_3 \\
 P_{230} \cdot (m_2 + l_1) = P_{200} \cdot l_3 + P_{123} \cdot m_1 \\
 P_{310} \cdot (m_3 + l_2) = P_{300} \cdot l_1 + P_{231} \cdot m_2 \\
 P_{320} \cdot (m_3 + l_1) = P_{300} \cdot l_2 + P_{132} \cdot m_1 \\
 P_{123} \cdot m_1 = P_{120} \cdot l_3 \\
 P_{132} \cdot m_1 = P_{130} \cdot l_2 \\
 P_{213} \cdot m_2 = P_{210} \cdot l_3 \\
 P_{231} \cdot m_2 = P_{230} \cdot l_1 \\
 P_{312} \cdot m_3 = P_{310} \cdot l_2 \\
 P_{321} \cdot m_3 = P_{320} \cdot l_1 \\
 P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{300} + P_{120} + P_{130} + P_{210} + P_{230} + \\
 P_{310} + P_{320} + P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321} = 1
 \end{cases}$$



$$P_{000} = \dots$$

$$P_{100} = \dots$$

$$P_{200} = \dots$$

$$P_{300} = \dots$$

$$P_{120} = \dots$$

$$P_{130} = \dots$$

$$P_{210} = \dots$$

$$P_{230} = \dots$$

$$P_{310} = \dots$$

$$P_{320} = \dots$$

$$P_{123} = \dots$$

$$P_{132} = \dots$$

$$P_{213} = \dots$$

$$P_{231} = \dots$$

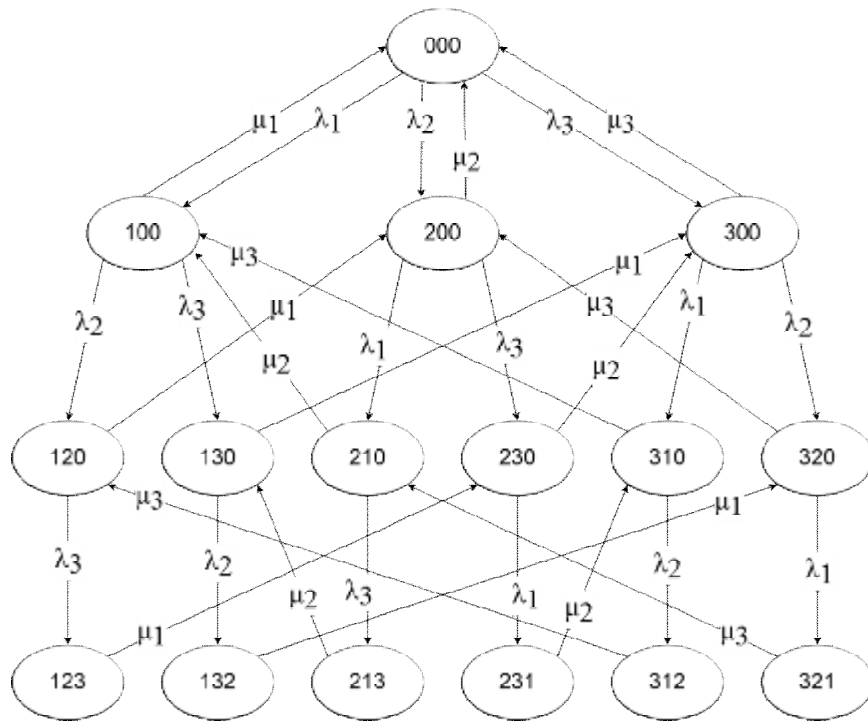
$$P_{312} = \dots$$

$$P_{321} = \dots$$

1. Беспriorитетное
обслуживание

Задача о ВС с общей шиной

1. Беспriorитетное обслуживание



$$\overline{t_{o_1}} = \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = \frac{p_1}{l_1 s_1}$$

p_1 – состояния, где заявка от первого процессора находится в очереди

s_1 – состояния, где у первого процессора – фаза счёта

$$\overline{t_{o_1}} = \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = \frac{p_1}{l_1 s_1} = \frac{P_{210} + P_{310} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321}}{l_1 \cdot (P_{000} + P_{200} + P_{300} + P_{230} + P_{320})}$$

Задача о ВС с общей шиной

1. Беспriorитетное обслуживание

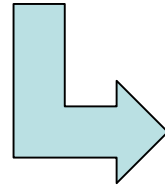
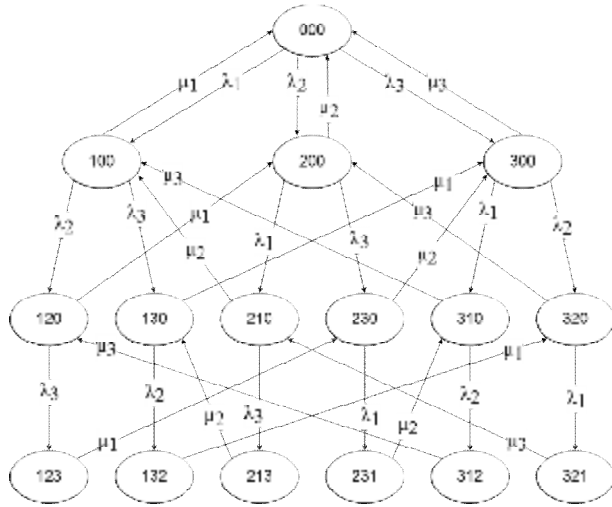
$$\overline{t_{o_1}} = \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = \frac{P_{210} + P_{310} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321}}{l_1 \cdot (P_{000} + P_{200} + P_{300} + P_{230} + P_{320})}$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{\overline{n_{o_2}}}{l_2} = \frac{P_{120} + P_{320} + P_{123} + P_{132} + P_{312} + P_{321}}{l_2 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{300} + P_{130} + P_{310})}$$

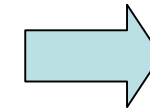
$$\overline{t_{o_3}} = \frac{\overline{n_{o_3}}}{l_3} = \frac{P_{130} + P_{230} + P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231}}{l_3 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{120} + P_{210})}$$

Задача о ВС с общей шиной

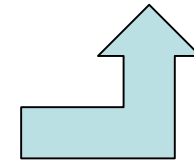
1. Беспriorитетное обслуживание



$$\begin{cases} P_{000} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = P_{100} \cdot m_1 + P_{200} \cdot m_2 + P_{300} \cdot m_3 \\ P_{100} \cdot (m_1 + l_2 + l_3) = P_{000} \cdot l_1 + P_{210} \cdot m_2 + P_{310} \cdot m_3 \\ P_{200} \cdot (l_1 + m_2 + l_3) = P_{120} \cdot m_1 + P_{000} \cdot l_2 + P_{320} \cdot m_3 \\ P_{300} \cdot (l_1 + l_2 + m_3) = P_{130} \cdot m_1 + P_{230} \cdot m_2 + P_{000} \cdot l_3 \\ P_{120} \cdot (m_1 + l_3) = P_{100} \cdot l_2 + P_{312} \cdot m_3 \\ P_{130} \cdot (m_1 + l_2) = P_{100} \cdot l_3 + P_{213} \cdot m_2 \\ P_{210} \cdot (m_2 + l_3) = P_{200} \cdot l_1 + P_{321} \cdot m_3 \\ P_{230} \cdot (m_2 + l_1) = P_{200} \cdot l_3 + P_{123} \cdot m_1 \\ P_{310} \cdot (m_3 + l_2) = P_{300} \cdot l_1 + P_{231} \cdot m_2 \\ P_{320} \cdot (m_3 + l_1) = P_{300} \cdot l_2 + P_{132} \cdot m_1 \\ P_{123} \cdot m_1 = P_{120} \cdot l_3 \\ P_{132} \cdot m_1 = P_{130} \cdot l_2 \\ P_{213} \cdot m_2 = P_{210} \cdot l_3 \\ P_{231} \cdot m_2 = P_{230} \cdot l_1 \\ P_{312} \cdot m_3 = P_{310} \cdot l_2 \\ P_{321} \cdot m_3 = P_{320} \cdot l_1 \\ P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{300} + P_{120} + P_{130} + P_{210} + P_{230} + \\ P_{310} + P_{320} + P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321} = 1 \end{cases}$$



$P_{000} = \dots$
 $P_{100} = \dots$
 $P_{200} = \dots$
 $P_{300} = \dots$
 $P_{120} = \dots$
 $P_{130} = \dots$
 $P_{210} = \dots$
 $P_{230} = \dots$
 $P_{310} = \dots$
 $P_{320} = \dots$
 $P_{123} = \dots$
 $P_{132} = \dots$
 $P_{213} = \dots$
 $P_{231} = \dots$
 $P_{312} = \dots$
 $P_{321} = \dots$

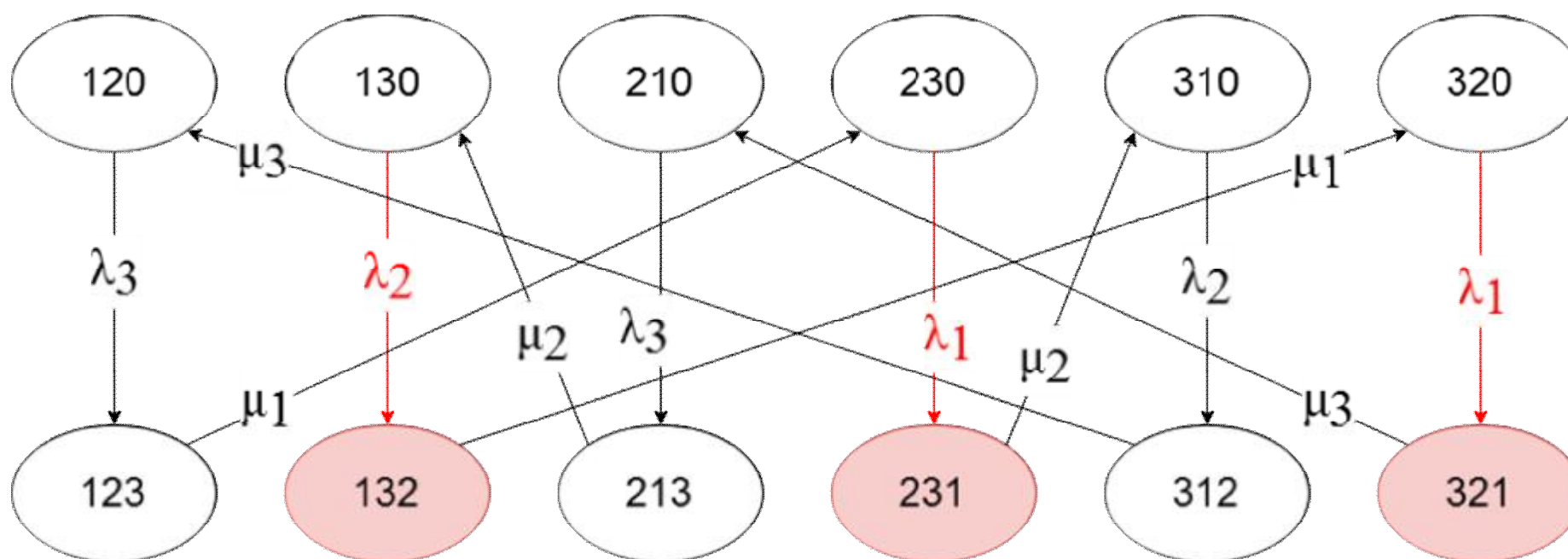


$$\begin{aligned} \overline{t_{o_1}} &= \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = \frac{P_{210} + P_{310} + P_{213} + P_{231} + P_{312} + P_{321}}{l_1 \cdot (P_{000} + P_{200} + P_{300} + P_{230} + P_{320})} \\ \overline{t_{o_2}} &= \frac{\overline{n_{o_2}}}{l_2} = \frac{P_{120} + P_{320} + P_{123} + P_{132} + P_{312} + P_{321}}{l_2 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{300} + P_{130} + P_{310})} \\ \overline{t_{o_3}} &= \frac{\overline{n_{o_3}}}{l_3} = \frac{P_{130} + P_{230} + P_{123} + P_{132} + P_{213} + P_{231}}{l_3 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{120} + P_{210})} \end{aligned}$$

Задача о ВС с общей шиной

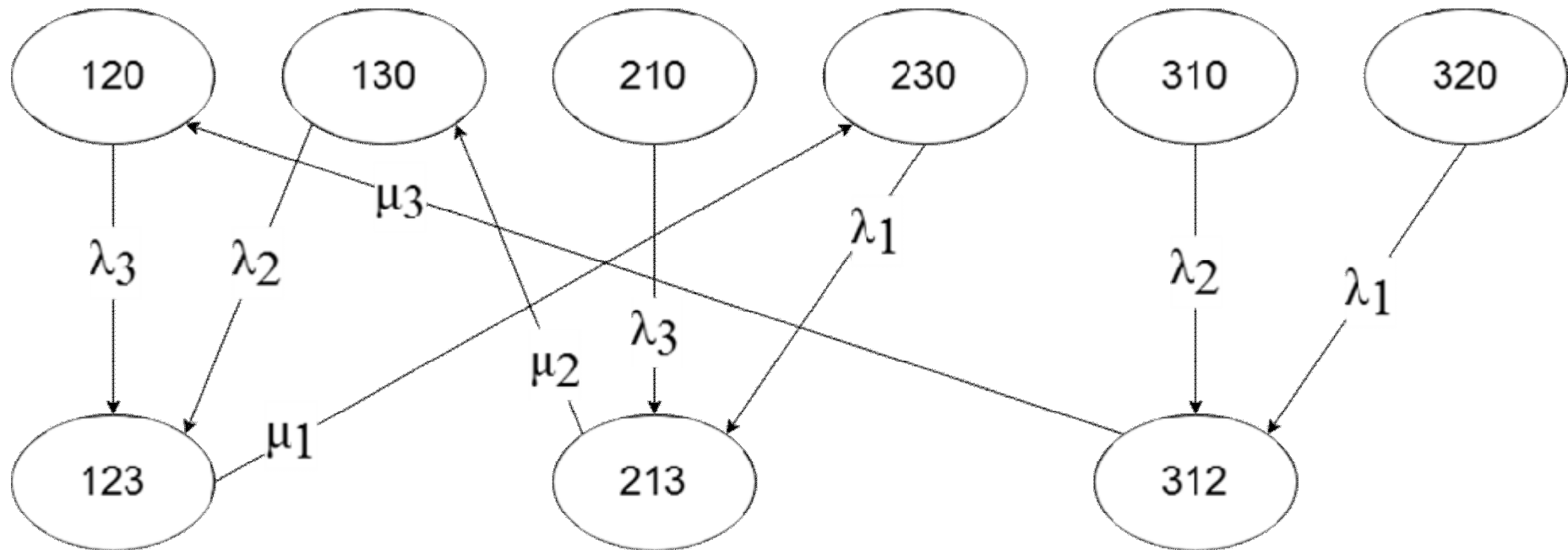
2. Обслуживание с относительным приоритетом

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$$



Задача о ВС с общей шиной

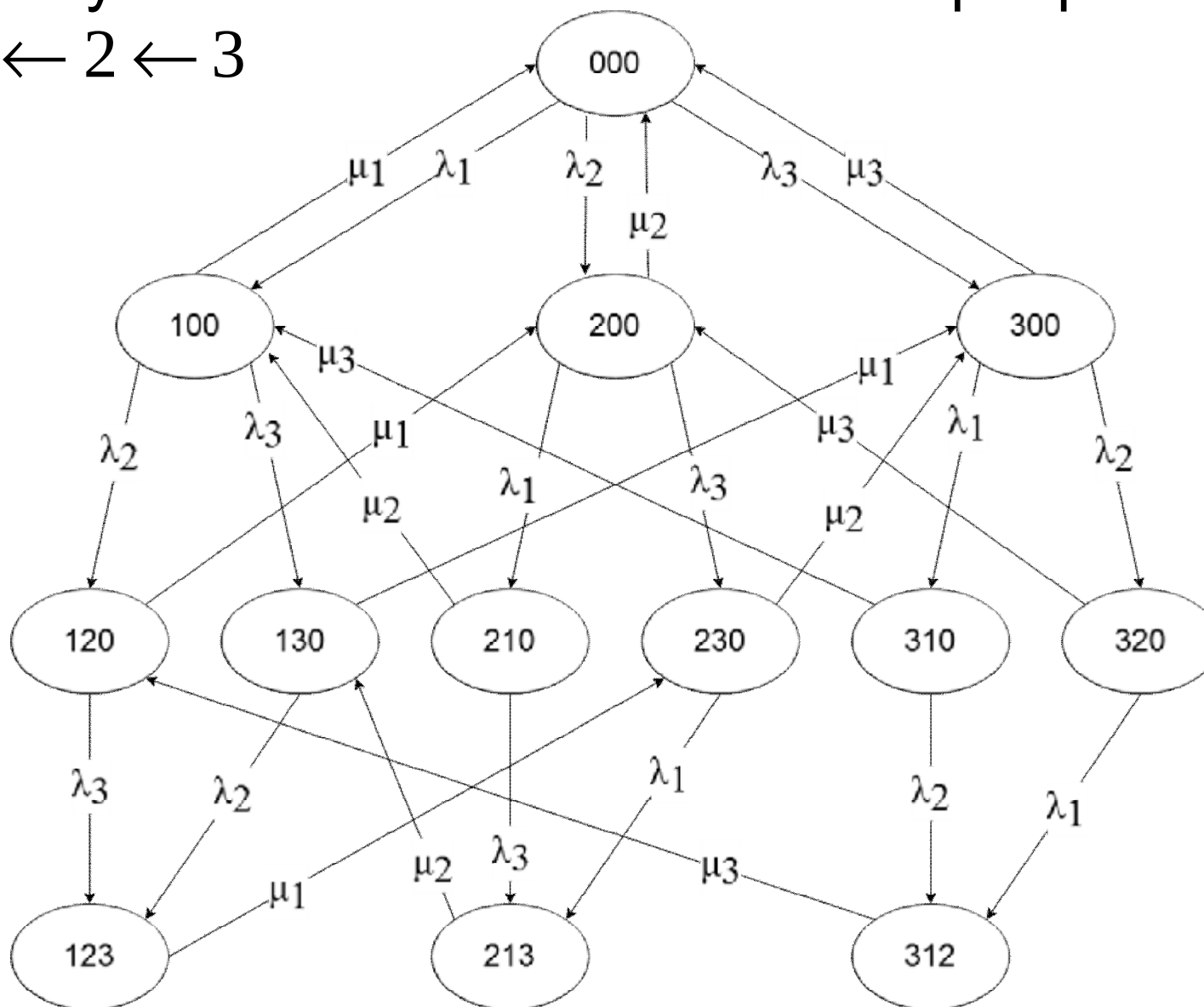
2. Обслуживание с относительным приоритетом $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



Задача о ВС с общей шиной

2. Обслуживание с относительным приоритетом

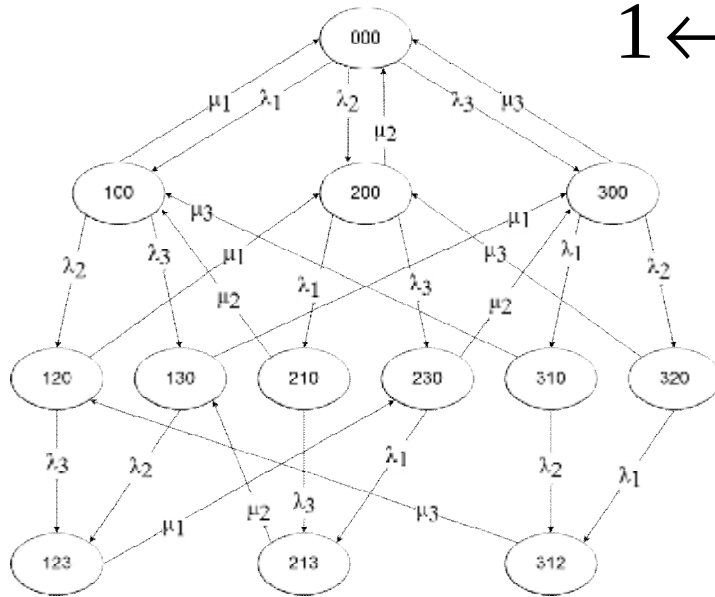
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



Задача о ВС с общей шиной

2. Обслуживание с относительным приоритетом

$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



$$\overline{t_{o_1}} = \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = \frac{P_{210} + P_{310} + P_{213} + P_{312}}{l_1 \cdot (P_{000} + P_{200} + P_{300} + P_{230} + P_{320})}$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{\overline{n_{o_2}}}{l_2} = \frac{P_{120} + P_{320} + P_{123} + P_{312}}{l_2 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{300} + P_{130} + P_{310})}$$

$$\overline{t_{o_3}} = \frac{\overline{n_{o_3}}}{l_3} = \frac{P_{130} + P_{230} + P_{123} + P_{213}}{l_3 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{120} + P_{210})}$$

$P_{000} = \dots$

$P_{100} = \dots$

$P_{200} = \dots$

$P_{300} = \dots$

$P_{120} = \dots$

$P_{130} = \dots$

$P_{210} = \dots$

$P_{230} = \dots$

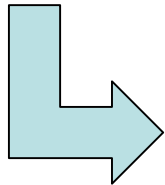
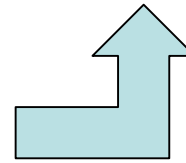
$P_{310} = \dots$

$P_{320} = \dots$

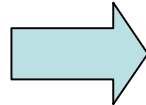
$P_{123} = \dots$

$P_{213} = \dots$

$P_{312} = \dots$



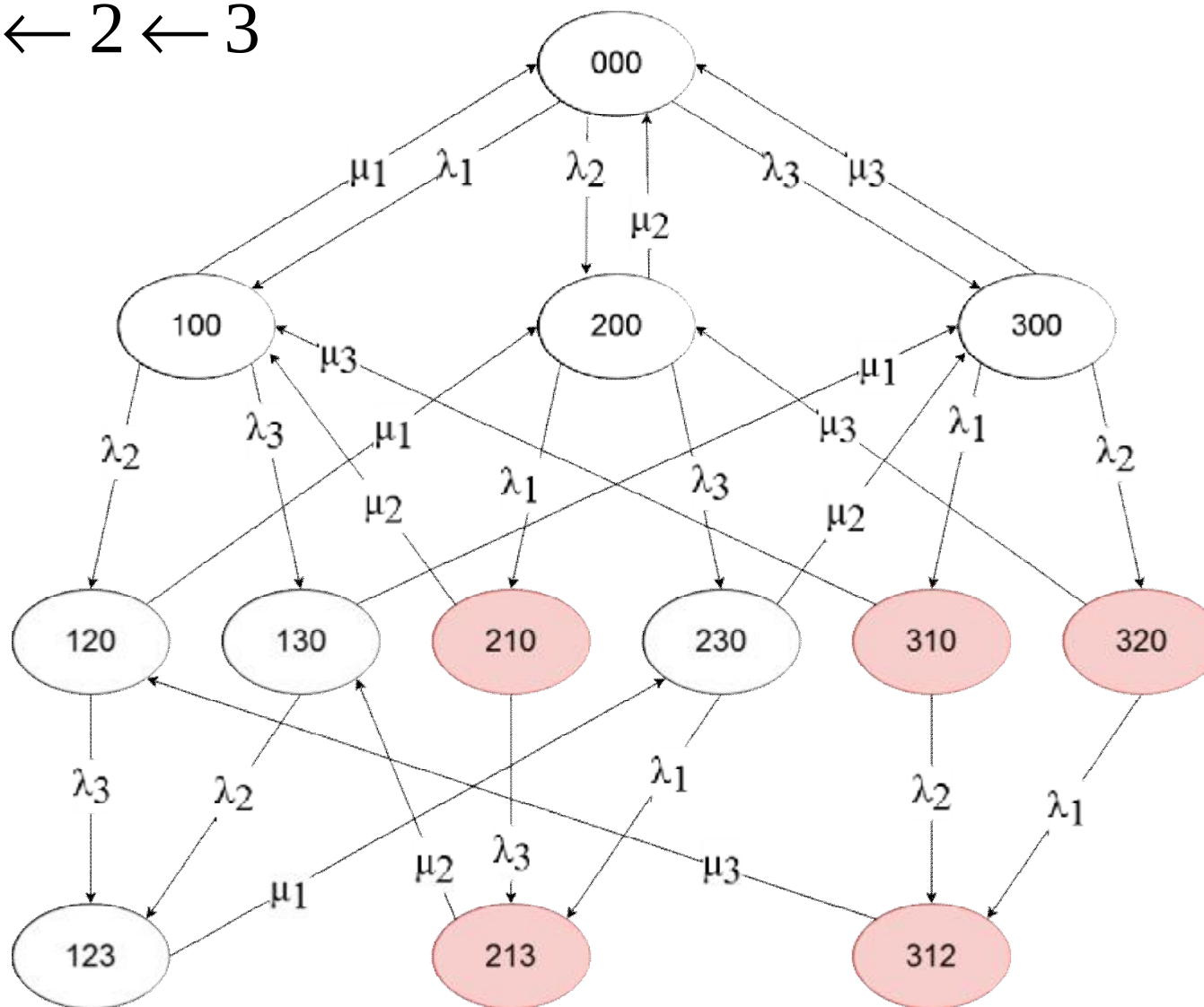
$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$



Задача о ВС с общей шиной

3. Обслуживание с абсолютным приоритетом

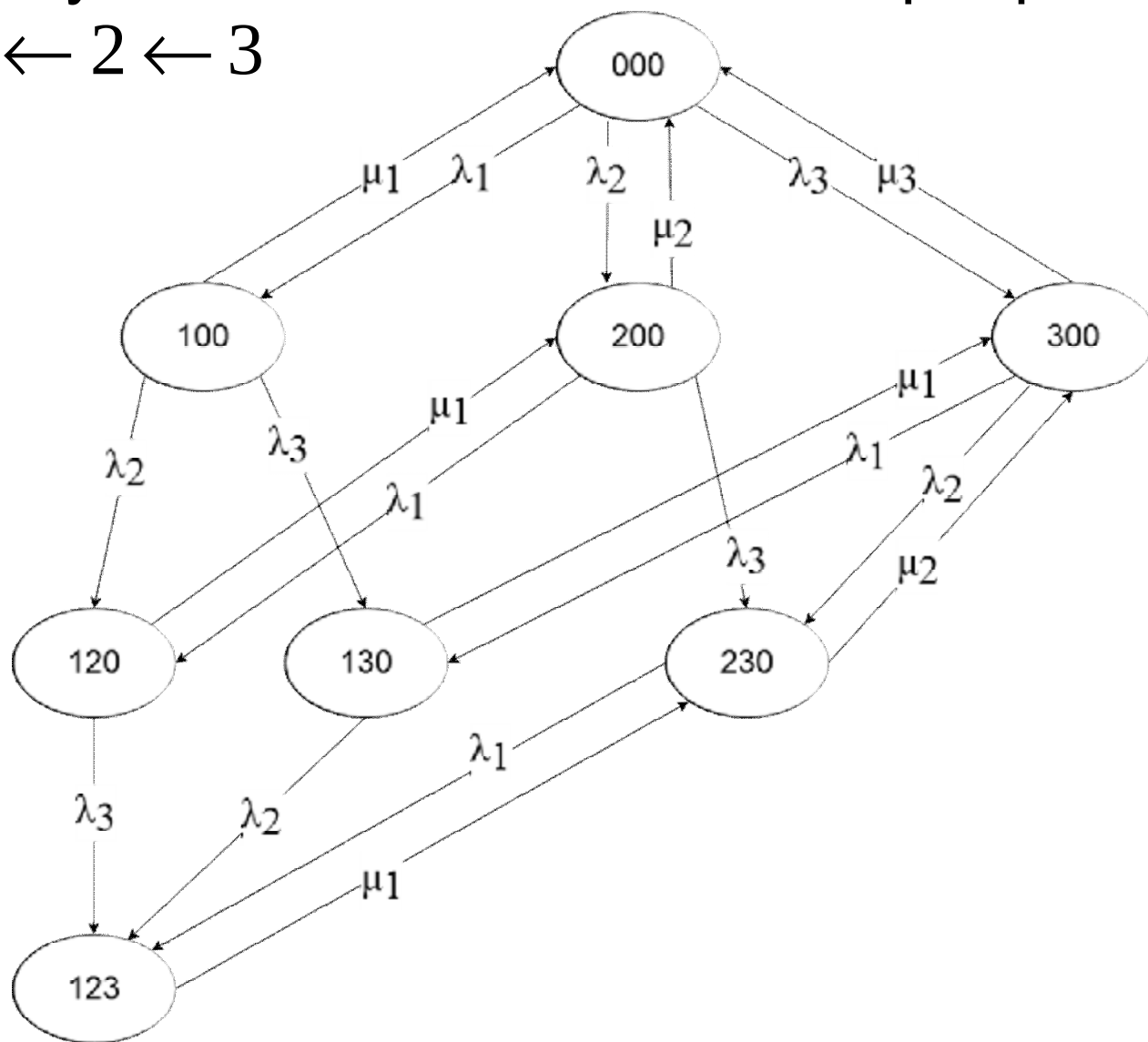
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



Задача о ВС с общей шиной

3. Обслуживание с абсолютным приоритетом

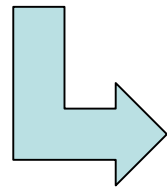
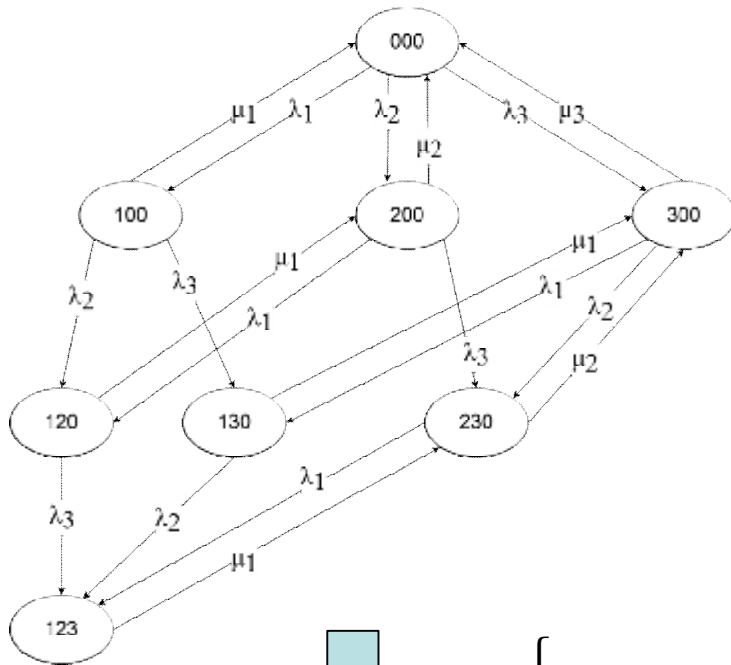
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



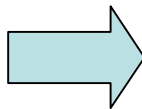
Задача о ВС с общей шиной

3. Обслуживание с абсолютным приоритетом

$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



{
...
...
...
...
...}



$P_{000} = \dots$

$P_{100} = \dots$

$P_{200} = \dots$

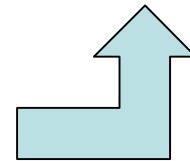
$P_{300} = \dots$

$P_{120} = \dots$

$P_{130} = \dots$

$P_{230} = \dots$

$P_{123} = \dots$



$$\overline{t_{o_1}} = \frac{\overline{n_{o_1}}}{l_1} = 0$$

$$\overline{t_{o_2}} = \frac{\overline{n_{o_2}}}{l_2} = \frac{P_{120} + P_{123}}{l_2 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{300} + P_{130})}$$

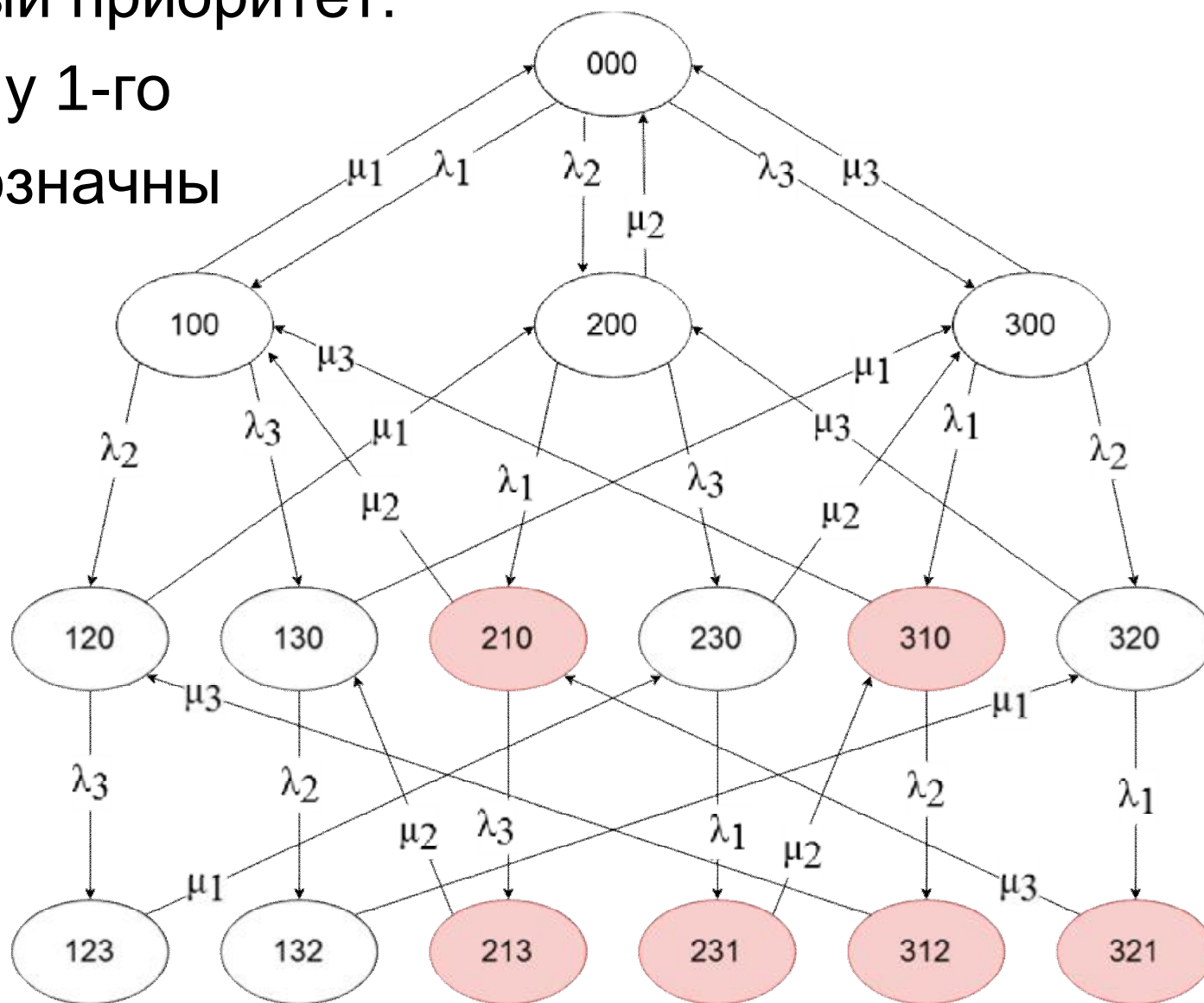
$$\overline{t_{o_3}} = \frac{\overline{n_{o_3}}}{l_3} = \frac{P_{130} + P_{230} + P_{123}}{l_3 \cdot (P_{000} + P_{100} + P_{200} + P_{120})}$$

Задача о ВС с общей шиной

4. Смешанный приоритет:

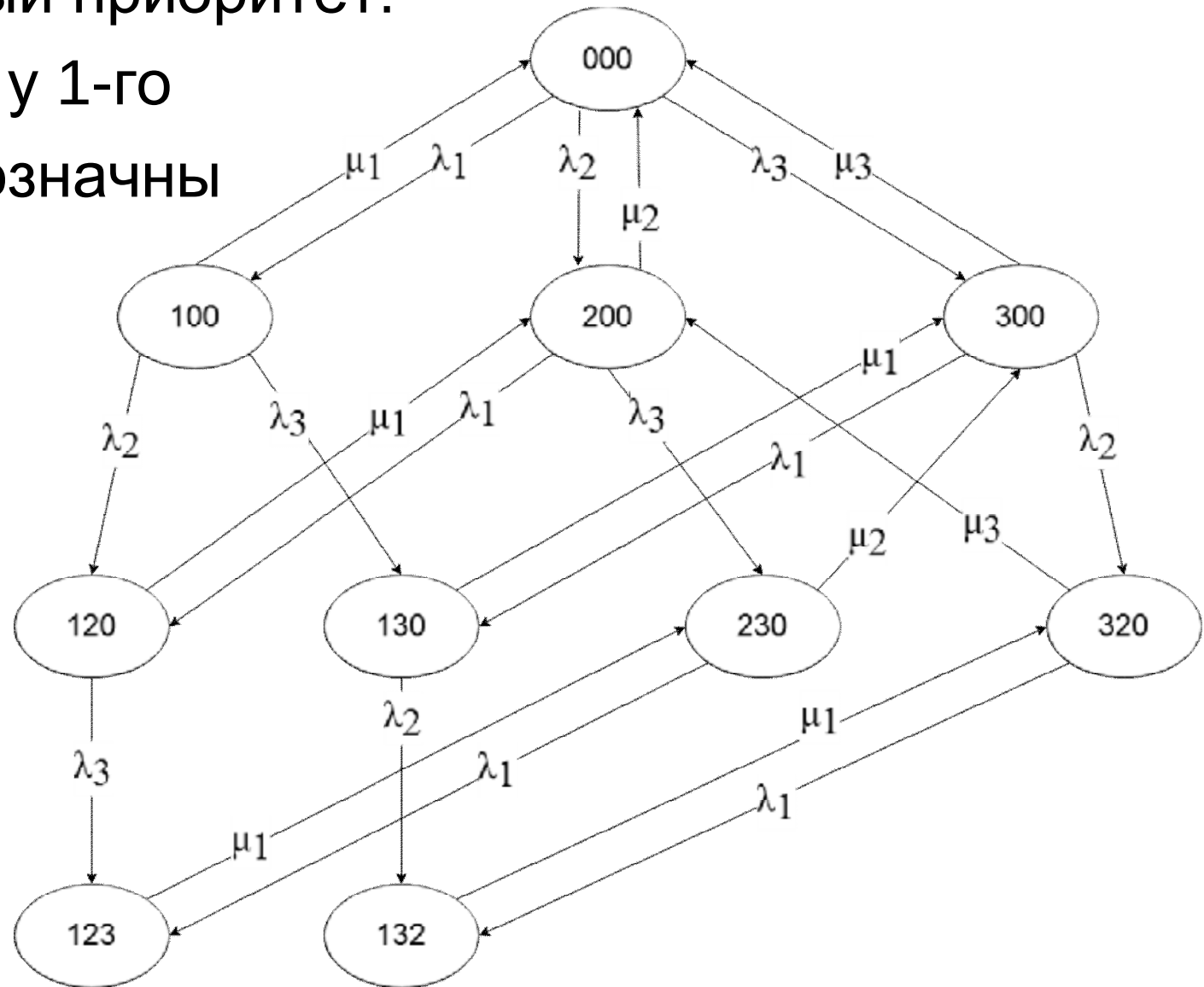
абсолютный у 1-го

2 и 3 – равнозначны



Задача о ВС с общей шиной

4. Смешанный приоритет:
абсолютный у 1-го
2 и 3 – равнозначны

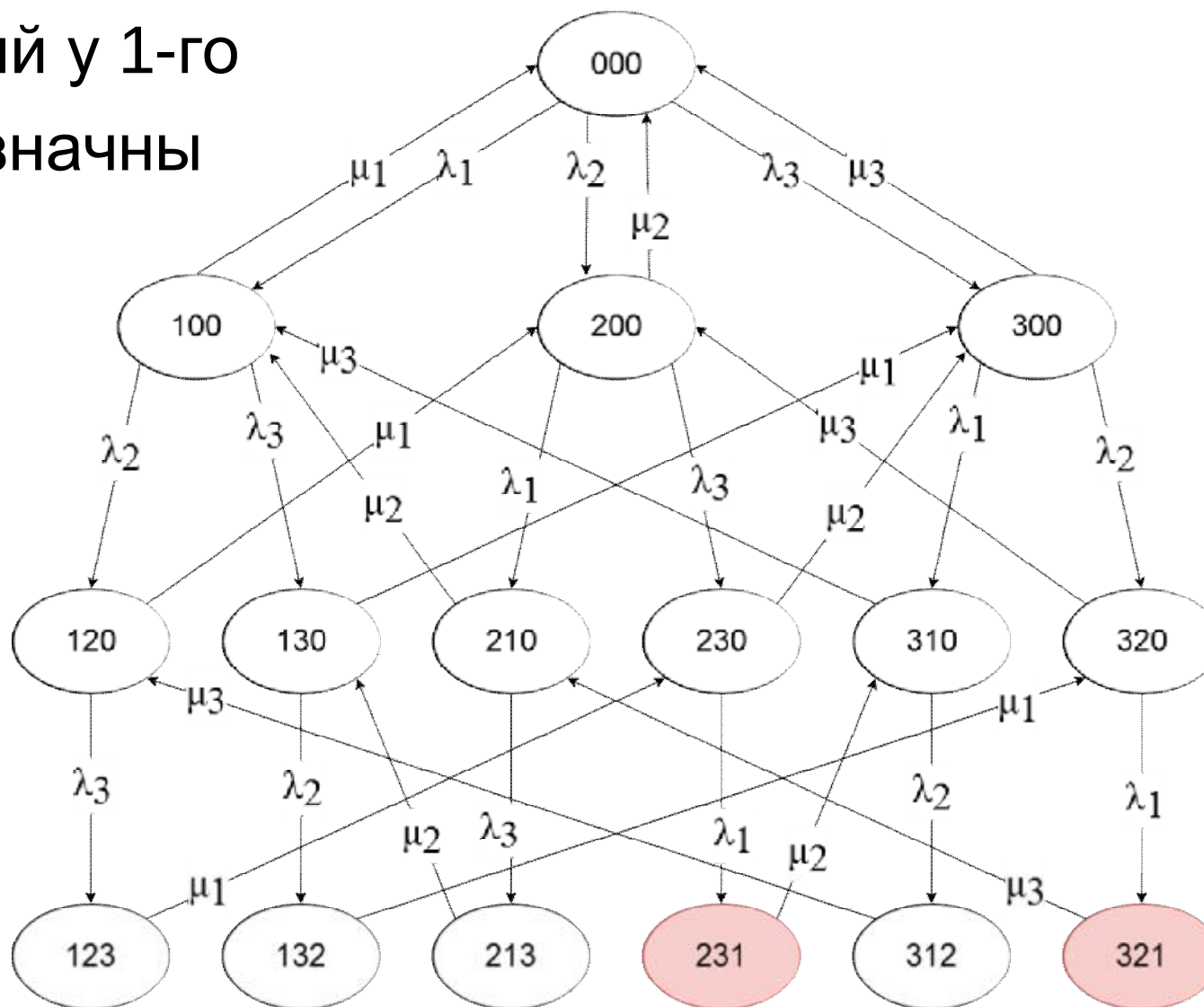


Задача о ВС с общей шиной

5. Смешанный приоритет:

относительный у 1-го

2 и 3 – равнозначны

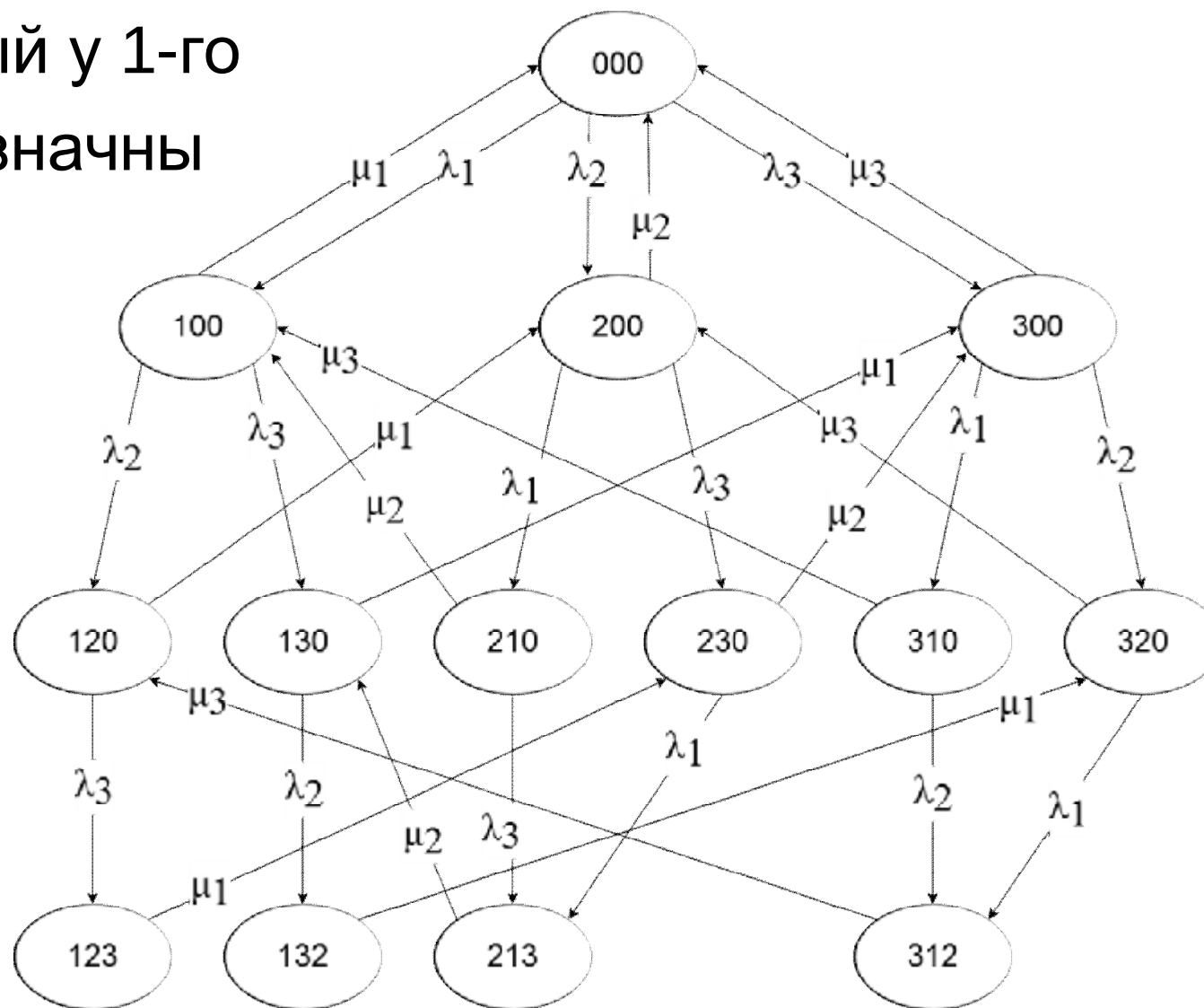


Задача о ВС с общей шиной

5. Смешанный приоритет:

относительный у 1-го

2 и 3 – равнозначны

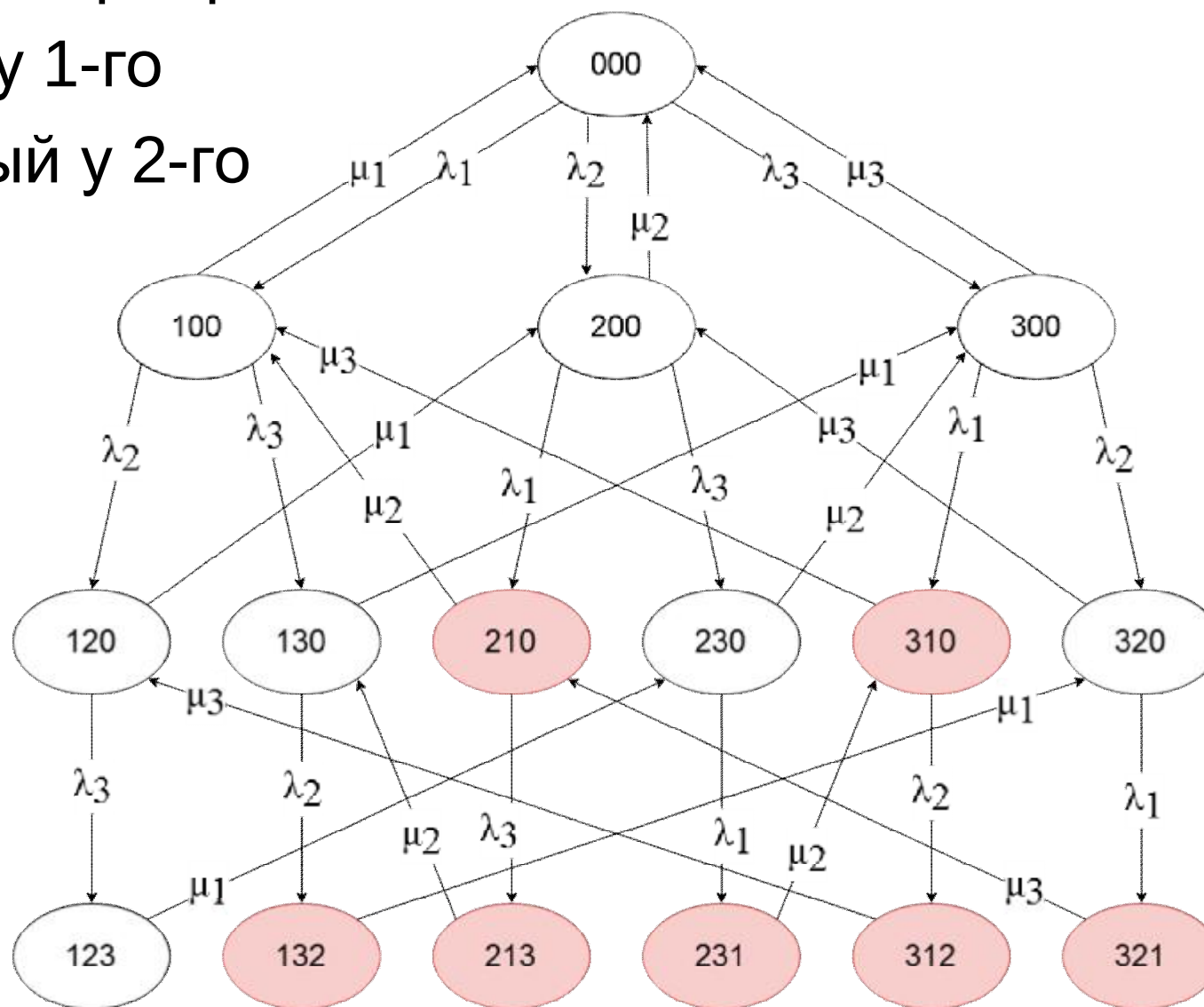


Задача о ВС с общей шиной

6. Смешанный приоритет:

абсолютный у 1-го

относительный у 2-го



Задача о ВС с общей шиной

6. Смешанный приоритет:
абсолютный у 1-го
относительный у 2-го

