

Как рассчитать замкнутую сеть массового обслуживания

Задана замкнутая сеть массового обслуживания, включающая $M = 4$ узла. В сети циркулирует N заявок в соответствии с матрицей передач, также заданы описания узлов как систем массового обслуживания (число каналов, интенсивность обслуживания).

На примере $N = 5$.

1. Рассчитать вероятности $\{w_j\}$ посещения узлов сети.

2. Записать все состояния сети:

3. Для каждого состояния записать операнды произведений:

5000
4100
4010
4001
3200
3110
3101
3020
3011
3002
2300
2210
2201
2120
2111
2102
2030
...
0005

5000	$z_1(5)$
4100	$z_1(4) \cdot z_2(1)$
4010	$z_1(4) \cdot z_3(1)$
4001	$z_1(4) \cdot z_4(1)$
3200	$z_1(3) \cdot z_2(2)$
3110	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1)$
3101	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_4(1)$
3020	$z_1(3) \cdot z_3(2)$
3011	$z_1(3) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$
3002	$z_1(3) \cdot z_4(2)$
2300	$z_1(2) \cdot z_2(3)$
2210	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_3(1)$
2201	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_4(1)$
2120	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(2)$
2111	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$
2102	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_4(2)$
2030	$z_1(2) \cdot z_3(3)$
...	
0005	$z_4(5)$

4. Для каждого состояния расшифровать операнды произведений:

5000	$z_1(5)$	$\frac{w_1^5}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4) \cdot m_1(5)}$
4100	$z_1(4) \cdot z_2(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)}$
4010	$z_1(4) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
4001	$z_1(4) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^4}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3) \cdot m_1(4)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
3200	$z_1(3) \cdot z_2(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)}$
3110	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
3101	$z_1(3) \cdot z_2(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
3020	$z_1(3) \cdot z_3(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_3^2}{m_3(1) \cdot m_3(2)}$
3011	$z_1(3) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
3002	$z_1(3) \cdot z_4(2)$	$\frac{w_1^3}{m_1(1) \cdot m_1(2) \cdot m_1(3)} \cdot \frac{w_4^2}{m_4(1) \cdot m_4(2)}$
2300	$z_1(2) \cdot z_2(3)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^3}{m_2(1) \cdot m_2(2) \cdot m_2(3)}$
2210	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_3(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)}$
2201	$z_1(2) \cdot z_2(2) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^2}{m_2(1) \cdot m_2(2)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
2120	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(2)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^2}{m_3(1) \cdot m_3(2)}$
2111	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_3(1) \cdot z_4(1)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_3^1}{m_3(1)} \cdot \frac{w_4^1}{m_4(1)}$
2102	$z_1(2) \cdot z_2(1) \cdot z_4(2)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_2^1}{m_2(1)} \cdot \frac{w_4^2}{m_4(1) \cdot m_4(2)}$
2030	$z_1(2) \cdot z_3(3)$	$\frac{w_1^2}{m_1(1) \cdot m_1(2)} \cdot \frac{w_3^3}{m_3(1) \cdot m_3(2) \cdot m_3(3)}$
...	...	...
0005	$z_4(5)$	$\frac{w_4^5}{m_4(1) \cdot m_4(2) \cdot m_4(3) \cdot m_4(4) \cdot m_4(5)}$

5. Подставить значения w_j и $m_i(k)$

$m_i(k)$ – суммарная интенсивность i узла для случая, когда в нём k заявок.

Например, если первый узел – одноканальный, второй узел – двухканальный, третий узел – трёхканальный, четвертый узел – четырёхканальный, то

$$m_1(1) = m_1, m_1(2) = m_1, m_1(3) = m_1, m_1(4) = m_1, m_1(5) = m_1$$

$$m_2(1) = m_2, m_2(2) = 2m_2, m_2(3) = 2m_2, m_2(4) = 2m_2, m_2(5) = 2m_2$$

$$m_3(1) = m_3, m_3(2) = 2m_3, m_3(3) = 3m_3, m_3(4) = 3m_3, m_3(5) = 3m_3$$

$$m_4(1) = m_4, m_4(2) = 2m_4, m_4(3) = 3m_4, m_4(4) = 4m_4, m_4(5) = 4m_4$$

6. Найти сумму всех произведений. Каждое произведение разделить на их сумму. Тем самым мы получим вероятности каждого состояния сети.

7. Находим среднее число заявок в каждом узле – как взвешенные суммы вероятностей, учитывая, сколько заявок в узле в каждом состоянии:

$$\bar{n}_1 = 5P_{5000} + 4P_{4100} + 4P_{4010} + 4P_{4001} + 3P_{3200} + 3P_{3110} + 3P_{3101} + 3P_{3020} + 3P_{3011} + 3P_{3002} + 2P_{2300} + 2P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\bar{n}_2 = 0P_{5000} + 1P_{4100} + 0P_{4010} + 0P_{4001} + 2P_{3200} + 1P_{3110} + 1P_{3101} + 0P_{3020} + 0P_{3011} + 0P_{3002} + 3P_{2300} + 2P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\bar{n}_3 = 0P_{5000} + 0P_{4100} + 1P_{4010} + 0P_{4001} + 0P_{3200} + 1P_{3110} + 0P_{3101} + 2P_{3020} + 1P_{3011} + 0P_{3002} + 0P_{2300} + 1P_{2210} + \dots + 0P_{0005}$$

$$\bar{n}_4 = 0P_{5000} + 0P_{4100} + 0P_{4010} + 1P_{4001} + 0P_{3200} + 0P_{3110} + 1P_{3101} + 0P_{3020} + 1P_{3011} + 2P_{3002} + 0P_{2300} + 0P_{2210} + \dots + 5P_{0005}$$

Можно проверить себя – сумма должна быть равна N : $\bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \bar{n}_3 + \bar{n}_4 = 5$

8. Аналогично находим среднее число заявок в очереди каждого узла – как взвешенные суммы вероятностей, учитывая, сколько заявок в очереди узла в каждом состоянии.

9. Находим средние времена нахождения заявок в каждом узле и в очереди каждого узла.