

4.5 Метод возможных направлений Зойтендейка

В отличие от метода проекции градиентов, ориентированного на линейные ограничения, рассматриваемый метод применим к общему случаю нелинейных ограничений, когда исходная задача формулируется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \max f(X); \\ g_j(X) \geq 0, \quad j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Принципиальная особенность метода возможных направлений проявляется в выборе направления, когда траектория поиска выходит на границу области: $g_l(X^{(i)}) = 0, l \in I$, где I – множество активных ограничений. Тогда задача выбора направления $K^{(i)} \in K_*(X^{(i)}) \cap K_*(X^{(i)})$, удовлетворяющего требованиям допустимости и эффективности (см. п.4.1), может быть сформулирована как вспомогательная задача линейного программирования в следующем виде:

$$\begin{aligned} \max u, \\ \nabla^T f(X^{(i)}) K^{(i)} \geq u, \\ \nabla^T g_l(X^{(i)}) K^{(i)} \geq u, \quad l \in I, \\ u \geq 0, \\ -1 \leq K_j^{(i)} \leq 1, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Сформулированная задача имеет следующее целевое назначение: максимизировать приращение функций $f(X)$ и $g_l(X)$, $l \in I$ при движении точки траектории по направлению $K^{(i)}$. Тем самым обеспечивается выполнение двух условий: возрастание целевой функции в направлении $K^{(i)}$ и перемещение внутрь области по ограничениям $g_l(X^{(i)}) = 0$, $l \in I$. Ограничения на составляющие $K_j^{(i)}$ вектора $K^{(i)}$ необходимы как условие существования оптимума вспомогательной задачи.

В случае, если решение $u_{opt} > 0$, такое направление $K^{(i)}$ существует, в противном случае ($u_{opt} = 0$) рассматриваемая точка $X^{(i)}$ является оптимальной.

Отметим, что при выборе направления не отдается предпочтения ни одному из двух упомянутых требований: допустимости и эффективности.

Это следует из формулировки вспомогательной задачи – правые части неравенств с градиентами $\nabla f(X^{(i)})$ и $\nabla g(X^{(i)})$ совпадают.

Метод Зонтендейка может быть формализован в виде алгоритма, определяющего последовательность шагов стандартной итерации метода.

Пусть исходная задача приведена к форме (4.36), в точке $X^{(i)} \in D$ множество I активных ограничений не пустое.

Шаг 1. Решение задачи (4.37) линейного программирования. Пусть $K^{(i)}$ и u – результат решения задачи (4.37).

Шаг 2. Анализ решения задачи (4.37). Если $u = 0$, переход к шагу 5; если $u > 0$, переход к шагу 3.

Шаг 3. Поиск длины шага в направлении $K^{(i)}$. Найти

$$t^{(i)} = \min \{ t^*, t_{пред j} \},$$

где

$$t^* = \arg \max_{(t)} \{ f(X^{(i)}) + tK^{(i)} \}, \quad \text{а}$$

$$t_{пред j} = \arg \{ g_j(X^{(i)} + tK^{(i)}) = 0 \}, j = \overline{1, J}.$$

Шаг 4. Определение новой координаты $X^{(i+1)}$:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} + t^{(i)} K^{(i)},$$

присвоение i значения $i + 1$, переход к шагу 1.

Шаг 5. Оптимальное решение найдено, так как дальнейшее увеличение целевой функции в пределах допустимой области невозможно: $X^* = X^{(i)}$, останов.

При построении конкретного алгоритма, реализующего метод Зойтендейка, необходимо задать точность определения оптимального решения исходной задачи. Поэтому теоретически обоснованное условие оптимальности $u = 0$ трансформируется в признак останова $u \leq \varepsilon$, где ε – допустимая погрешность определения наступления условий оптимальности. Все точки $X^{(i)}$ траектории поиска принадлежат допустимой области и, если в какой-либо из них отсутствуют активные ограничения, в алгоритм включается любой из методов выбора направления, используемый в задачах безусловной оптимизации вплоть до появления активных ограничений в очередной точке траектории.

Пример 5. Найти максимум $f(X) = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 3)^2$

при ограничениях $g_1(X) = -x_2^2 + 2x_1 - 1 \geq 0$

$$g_2(X) = -0.8x_1^2 - 2x_2 + 9 \geq 0$$

Градиенты $\nabla f(X)$, $\nabla g_1(X)$, $\nabla g_2(X)$ – линейные функции:

$$\nabla f(X) = [2(3 - x_1), 2(3 - x_2)]^T;$$

$$\nabla g_1(X) = [2, -2x_2]^T;$$

$$\nabla g_2(X) = [-1.6x_1, -2]^T.$$

Пусть $X^{(0)} = (1, 1)^T$. $X^{(0)} \in D$, так как $g_1(X^{(0)}) = 0$ и $g_2(X^{(0)}) = 6.2 > 0$. Кроме того, первое ограничение выполняется как равенство: $I = \{1\} \neq \emptyset$.

Шаг 1. Поиск направления $K^{(0)}$. Для этого сформулируем вспомогательную задачу:

$\max u,$

$$\begin{cases} 4K_1^{(0)} + 4K_2^{(0)} \geq u; \\ 2K_1^{(0)} - 2K_2^{(0)} \geq u; \\ -1 \leq K_1^{(0)} \leq 1; \\ -1 \leq K_2^{(0)} \leq 1. \end{cases}$$

Получим решение этой задачи:

$$K^{(0)} \cong (1, -0.333)^T; \quad u \cong 2.666.$$

Шаг 2. Анализ решения вспомогательной задачи

$$u \cong 2.666 > 0, \text{ переход к шагу 3.}$$

Шаг 3. Поиск длины $t^{(0)}$ шага в направлении $K^{(0)}$.

$$t^{(0)} = \min \{t^*, t_{\text{пред}1}, t_{\text{пред}2}\};$$

$$t^* = \arg \max_{(t)} \{f(X^{(0)} + tK^{(0)})\} = 1.200;$$

$$t_{пред_2} = \arg \{ g_2(X^{(0)} + tK^{(0)}) = 0 \} \cong 2.261;$$

$$t^{(0)} = \min \{ 1.200; 2.261 \} = 1.200;$$

$$t_{пред_1} = \arg \{ g_1(X^{(0)} + tK^{(0)}) = 0 \} \cong 24.000.$$

Шаг 4. Определение координат точки $X^{(1)}$:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X^{(0)} + t^{(0)} K^{(0)} \cong (1, 1)^T + 1.200(1, -0.333)^T \cong \\ &\cong (2.200, 0.600)^T \end{aligned}$$

Шаг 5. Поиск направления $K^{(1)}$. Определение множества активных ограничений: $I = \emptyset$.

Так как $I = \emptyset$, выбор $K^{(1)}$ осуществляется в соответствии с методом безусловной оптимизации. Выберем метод Ньютона:

$$K^{(1)} = -H^{-1}(\nabla f(X^{(1)})) = -\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.600 \\ 4.800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.800 \\ 2.400 \end{bmatrix}.$$

Шаг 6. Поиск длины $t^{(1)}$ шага в направлении $K^{(1)}$.

$$t^{(1)} = \min \{ t^*, t_{пред_2}, t_{пред_1} \};$$

$$t^* = 1.000;$$

$$t_{пред_1} = \arg \{ g_1(X^{(1)} + tK^{(1)}) = 0 \} \cong 0.624;$$

$$t_{пред_2} = \arg \{ g_2(X^{(1)} + tK^{(1)}) = 0 \} \cong 0.499;$$

$$t^{(1)} = t_{пред_2} = 0.499.$$

Шаг 7. Определение координат точки $X^{(2)}$.

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} + t^{(1)} K^{(1)} \cong (2.200, 0.600)^T + 0.499(0.800, 2.400)^T \cong \\ &\cong (2.599, 1.798)^T. \end{aligned}$$

Шаг 8. Определение множества активных ограничений в точке $X^{(2)}$:

$$I = \{ 2 \}.$$

Шаг 9. Поиск направления $K^{(2)}$. Формулировка вспомогательной задачи

max u ,

$$\begin{cases} 1.600 K_1^{(2)} + 4.800 K_2^{(2)} \geq u; \\ -4.159 K_1^{(2)} + 2.000 K_2^{(2)} \geq u; \\ -1 \leq K_1^{(2)} \leq 1; \\ -1 \leq K_2^{(2)} \leq 1. \end{cases}$$

Решение задачи : $K^{(2)} \cong (-1.000, 0.847)$, $u \cong 2.465$.

Шаг 10. Поиск длины $t^{(2)}$ шага в направлении $K^{(2)}$.

$$t^{(2)} = \min \{ t^*, t_{пред_1}, t_{пред_2} \};$$

$$t^* \cong 0.718;$$

$$t_{пред_1} = \arg \{ g_1(X^{(1)} + tK^{(1)}) = 0 \} \cong 0.187;$$

$$t_{пред_2} = \arg \{ g_2(X^{(1)} + tK^{(1)}) = 0 \} \cong 3.081;$$

$$t^{(2)} = t_{пред_1} = 0.187.$$

Шаг 11. Определение координат точки $X^{(3)}$.

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= X^{(2)} + t^{(2)}K^{(2)} \cong (2.599, 1.798)^T + 0.187(-1.000, 0.847)^T \cong \\ &\cong (2.412, 1.956)^T. \end{aligned}$$

В табл. 4.8 приведены данные о дальнейших шагах решения задачи оптимизации. Итерации метода продолжаются вплоть до достижения максимума целевой функции в окрестности точки $X^* = (2.5, 2.0)^T$. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о возможной слабой сходимости метода: для данной задачи значение параметра u довольно сильно отличается от 0 даже вблизи точки X^* . Отметим, что в практической реализации метода Зонтендейка целесообразно применять совместно несколько признаков останова: например, в добавление к уже упомянутому $u < \varepsilon$ использовать условие $\|X^{(i)} - X^{(i-1)}\| < \delta$. На рис. 4.5 показаны допустимая область исходной задачи, линии равного уровня целевой функции и траектория поиска оптимального решения X^* .

Таблица 4.8

	Номер шага i						X_{opt}
	0	1	2	3	4	5	
$x_1^{(i)}$	1	2.200	2.599	2.412	2.515	2.491	2.5
$x_2^{(i)}$	1	0.600	1.798	1.956	1.970	1.996	2.0
u	2.666	—	2.465	1.463	1.150	1.347	0

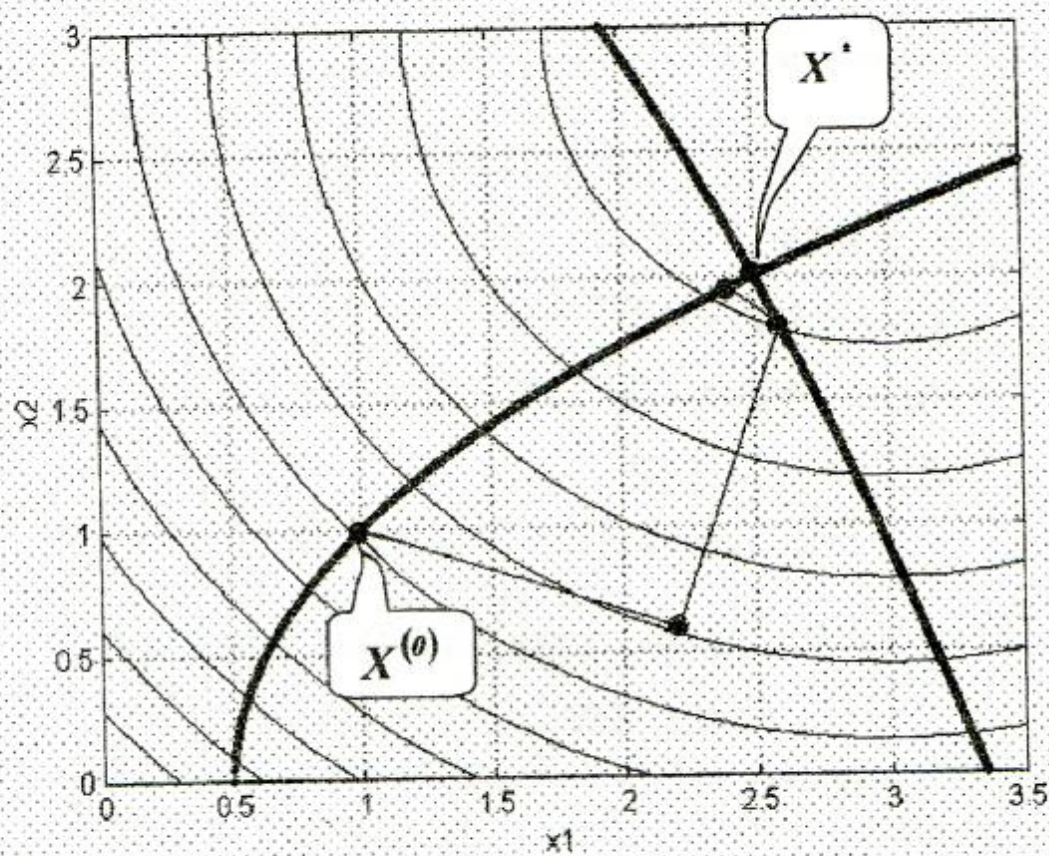


Рис. 4.5